Espaces vectoriels : à retenir (J-Y D)

On se donne un espace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.
(Par exemple : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$.)

Définition

On dit qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :
(i) $0 \in F$;
(ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $v, w \in F$, on a $\alpha\, v + \beta\, w \in F$.

Définition-Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On note : $F+G := \{v+w\ ;\ v \in F \text{ et } w \in G\}$.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E (ce qui s'écrit $E = F \oplus G$) s'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :
(i) pour tout $u \in E$, il existe $v \in F$ et $w \in G$ uniques[1] tels que $u = v + w$;
(ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Définition

(a) *Droite de E* : un ensemble $D = \{sv\}_{s\in\mathbb{K}}$ avec $v \in E \setminus \{0\}$.
Plan de E : un ensemble $P = \{sv + tw\}_{s,t\in\mathbb{K}}$ avec $u, v \in E$, $\overbrace{v \neq 0 \text{ et } w \notin \{sv\}_{s\in\mathbb{K}}}^{\text{« } v \text{ et } w \text{ non-colinéaires »}}$.

(b) *Hyperplan de E* : un sous-espace vectoriel H de E qui a pour supplémentaire une droite.

Définition

Soient $v_1, \dots, v_p \in E$.

(a) On dit que *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre* si pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, on a :
$\alpha_1\, v_1 + \cdots + \alpha_p\, v_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots \alpha_p = 0$.

(b) On dit que *la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice de E* si pour tout $v \in E$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tels que : $v = \alpha_1\, v_1 + \cdots + \alpha_p\, v_p$.

Définition-Proposition

On dit qu'une famille finie $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de E est *une base de E* si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :
(i) $(v_1, \dots, v_p)$ est libre, et génératrice de E ;
(ii) pour tout $v \in E$ il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ unique tel que $v = \alpha_1\, v_1 + \cdots + \alpha_p\, v_p$.
Dans ce cas $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ s'appellent *les coordonnées de v suivant $\mathscr{B}$*. On notera : $v_{/\mathscr{B}} \left| \begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{matrix} \right.$.

Théorème (« théorème de la base incomplète »)

On suppose que E a une famille génératrice finie $(g_1, ..., g_k)$.

Toute famille libre $(h_1, ..., h_l)$ de E se complète à l'aide de certains vecteurs parmi $g_1, ..., g_k$ en une base $(e_1, ..., e_n)$ de E.

Corollaire

On suppose que E a une famille génératrice finie.

(a) On a : E a une base finie $(e_1, ..., e_n)$. Les autres bases de E ont n vecteurs.

(b) Toute famille libre de E a au plus n vecteurs ;
quand elle a n vecteurs, c'est une base de E.

(c) Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs ;
quand elle a n vecteurs, c'est une base de E.

1. Comme d'habitude il faut interpréter "il existe $v \in F$ et $w \in G$ uniques" par "il existe $(v, w) \in F \times G$ unique".

Définition-Proposition

(a) On suppose que E est *de dimension finie* (c'est-à-dire que E a une base finie).
Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est noté $\dim E$.

(b) Soient $v_1, ..., v_p \in E$. On pose : $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p) := \big\{\alpha_1\, v_1 + \cdots + \alpha_p\, v_p\,;\ \alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}\big\}$.
On a : $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$ est de dimension finie. On note $\mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_p) := \dim \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$.

Proposition

(a) L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ admet la base $(e_1, \ldots, e_n)$, dite *canonique*, déterminée par :

$$e_1 := (1, 0, ..., 0),\ \ e_2 := (0, 1, 0, ..., 0),\ \ \ldots,\ \ e_n := (0, ..., 0, 1).$$

En particulier $\dim \mathbb{K}^n = n$

(b) L'espace vectoriel $\mathbb{K}_N[X]$ a pour base $(1, X, ..., X^N)$.
En particulier $\dim \mathbb{K}_N[X] = N + 1$.

Proposition

On suppose E de dimension finie.

(a) Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie avec $\dim F \leq \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.

(b) Les droites de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension 1.
Les plans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension 2.
Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim E - 1$.

Proposition

On suppose que E a une base finie $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$.

Soient $v_1 \Big|_{/\mathscr{B}} \begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}, \ldots, v_p \Big|_{/\mathscr{B}} \begin{matrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{matrix} \in E$.

On transforme $\quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \quad$ en $\quad A' = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & d_1 & & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ldots & 0 & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & & & & & \\ & & & & & & d_2 & & & & & \\ & & & & & & 0 & \ldots & 0 & & & \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & & & & 0 & \ldots & 0 & & & \\ & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & d_r & \\ & & & & & & & & & & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$

par la méthode de Gauss, avec $d_1 \neq 0$, ..., $d_r \neq 0$.

On a : $\mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_p) = r$ « calcul du rang par la méthode de Gauss ».[2]

Proposition

Soient $v_1, ..., v_p \in E$. On pose : $r = \mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_p)$.

(a) La famille $(v_1, ..., v_p)$ est libre si et seulement si $r = p$.

(b) On suppose E de dimension finie, notée n.
La famille $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice de E si et seulement si $r = n$.

Proposition

On suppose que E est de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $(v_1, ..., v_p)$ une base de F et $(w_1, ..., w_q)$ une base de G.

(a) La famille $(v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q)$ engendre $F + G$.

(b) $E = F \oplus G$ si et seulement si $(v_1, ..., v_p, w_1, ..., w_q)$ est une base de E.

(c) On a : $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.
En particulier, si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

---

2. On note j_1, ..., j_r les ordres des colonnes contenant les termes d_1, ..., d_r mis en évidence dans A'.
On obtient $\mathrm{rg}\,(v_{j_1}, ..., v_{j_r}) = r$ par le résultat précédent en rayant à chaque étape les colonnes autres que celles d'ordres j_1, ..., j_r. Ainsi $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension r dans l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_r)$ de dimension r. Il en résulte que la famille $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$.