# II. Applications linéaires

1) Pour toute application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on définit $L(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $L(f)(x) = x\,f(x)$ quand $x \in \mathbb{R}$.
Peut-on affirmer que : « $L(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\, L(f) + \beta\, L(g)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ » ?

2) Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :
$$a\colon \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+5\end{array} \;;\quad b\colon \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array} \;;\quad c\colon \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (2x+y, x-y)\end{array} \;;\quad d\colon \begin{array}{l}\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto ((P(-1), P(0), P(1))\end{array}.$$

3) On note $F$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère l'application $l : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ h & \longmapsto & h' - h \end{array}$ où $h'$ est la dérivée de $h$.
   a) Vérifier que $l$ est linéaire.
   b) Démontrer que le noyau de $l$ est une droite vectorielle.

4) a) La conjugaison $c : z \mapsto \bar{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ? $\mathbb{C}$-linéaire ?
   b) Montrer qu'il existe au moins deux isomorphismes $f$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ tels que $f(1,1) = (1,2)$.

5) Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(1,1,2,0) = 1, \quad f(1,2,1,0) = 2, \quad f(2,0,1,1) = 3, \quad f(0,0,0,2) = 4.$$
Calculer $f(1,1,1,1)$.

6) Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par
$$f(x,y,z,t) = (2x+y+4z, x+y+3z+t, 3x+2y+7z+t, x-y-z-3t).$$
   a) Trouver une base du sous-espace $\operatorname{Ker} f$ de $\mathbb{R}^4$ ; quelle est sa dimension ?
   b) Trouver une base et des équations du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ de $\mathbb{R}^4$ ; quelle est sa dimension ?
   c) Que vaut $\operatorname{rg}(f)$ ? L'application $f$ est elle injective ? Surjective ?
   d) Soit $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$.
   Montrer que l'on a $E \oplus \operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^4$.
   e) Soit $g : E \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.
   Montrer que $g$ est injective et que l'on a $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$.

7) On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x',y',z',t') \end{array}$,
avec $x' = x + 2y + 7z + 4t$, $y' = x - y + z + t$, $z' = -x + y - z - t$, et $t' = x + 3z + 2t$.
   a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
   b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

8) On considère l'application $l : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$ où $P(X+1)$ est un polynôme composé.
   a) Vérifier que $l$ est linéaire.
   b) Montrer que $\operatorname{Ker} l$ est formé des polynômes constants.
   c) Vérifier que, pour chaque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application $l$ se restreint en $l_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   d) En déduire que $l$ est surjective.

9) Soit $n$ un entier $\geq 2$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, et $(e_1, ..., e_n)$ une base de $E$.
On considère un endomorphisme $f$ de $E$ tel que $f(x)$ est colinéaire à $x$ pour tout $x \in E$.
   a) Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, il existe un unique scalaire $\lambda_i$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
   b) Soient $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i \neq j$. Calculer les coordonnées de $f(e_i + e_j)$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$.
   c) En déduire que $f$ est une homothétie.

10) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ représentée dans les bases canoniques par la matrice $A$. Calculer l'image par $f$ du vecteur $(2, -1)$.

b) On considère l'application linéaire $F : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ représentée dans les bases $(1, X)$ et $(1, X, X^2)$ par la matrice $A$. Calculer l'image par $F$ du polynôme $P = 3X + 4$.

11) Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $\mathscr{B}' := (e_3, e_2, e_1)$ est une base de $E$, puis écrire la matrice $M'$ de $u$ dans $\mathscr{B}'$.

b) Montrer que $\mathscr{B}'' := (e_1 + e_3, e_3, e_2 - e_3)$ est une base de $E$, puis écrire la matrice $M''$ de $u$ dans $\mathscr{B}''$.

12) a) Soient $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' \in \mathbb{R}$. Que représentent les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$ :

$E : ax + by + cz = 0$ et $F : \begin{cases} a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases}$ ?

b) Calculer la dimension du sous espace-vectoriel $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^p$ d'équation

$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p & = 0 \\ \quad ... & \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{np}x_p & = 0 \end{cases}$ en fonction du rang $r$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1p} \\ & ... & \\ a_{n1} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$.

13) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la droite $F$ engendrée par $(1, 2, 3)$ et le plan $G$ d'équation $x + y + z = 0$.

a) Soit $v \in \mathbb{R}^3$. Montrer, en le calculant, qu'il existe un unique $(v_1, v_2) \in F \times G$ tel que $v = v_1 + v_2$. *Indication :* on pourra par exemple s'intéresser aux conditions $v_1 \in F$ et $v - v_1 \in G$.

b) Soit $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ et $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$. Donner les matrices de $s$ et $p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c) Soient $a$ un vecteur non nul de $F$ et $(b, c)$ une base de $G$. Montrer que $(a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont les matrices de $p$ et $s$ dans cette base ?

14) Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$M = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -6 \\ -2 & 9 & -6 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $f$ est une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel $G$ de $\mathbb{R}^3$, parallèlement à un sous-espace vectoriel $H$ de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer une base $\mathscr{B}_G$ de $G$, un base $\mathscr{B}_H$ de $H$, et la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ concaténée de $\mathscr{B}_G$ et $\mathscr{B}_H$.

15) On note $\mathscr{B} := (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient $U = (1, 1, 1)$, $V = (-1, 1, 0)$ et $W = (1, 0, -1)$. Montrer que $\mathscr{B}' := (U, V, W)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

*Indication :* on pourra, soit exprimer les vecteurs de $\mathscr{B}$ à l'aide des vecteurs de $\mathscr{B}'$, soit tenter d'inverser la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

16) Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de bases $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$.

On note $l$ l'application linéaire de $E$ dans $F$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Dans les questions suivantes, utiliser une fois un calcul direct, et une fois une formule du cours.

a) Vérifier que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$ $e'_3 = e_1 + e_2$ est une base de $E$, et calculer la matrice de $l$ dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}$.

b) Vérifier que $\mathscr{C}' = (f'_1, f'_2)$ avec $f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ et $f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ est une base de $F$, et calculer la matrice de $l$ dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}'$.