Applications linéaires et matrices : à retenir (J-Y D)

On se donne des espaces vectoriels E, F, G sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Définition

On dit qu'une application $f : E \to F$ est linéaire si :

$f(\alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, f(v) + \beta\, f(w)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $v, w \in E$. ← [ensemble noté $\mathrm{Hom}(E, F)$]

On appelle plus précisément :

– *forme linéaire sur E* une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$;
– *endomorphisme de l'espace vectoriel E* une application linéaire de E dans E ;
– *isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur F* une bijection linéaire de E sur F ;
– *automorphisme de l'espace vectoriel E* une bijection linéaire de E sur E.

Proposition

(a) Soient A un ensemble et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'ensemble, noté V^A, des applications de A dans V, muni des lois déterminées par

$$\underset{V^A}{\underset{\cap}{f}} + \underset{V^A}{\underset{\cap}{g}} : \begin{array}{l} A \to V \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \underset{\mathbb{K}}{\underset{\cap}{\alpha}} \times \underset{V^A}{\underset{\cap}{f}} : \begin{array}{l} A \to V \\ x \mapsto \alpha\,(f(x)) \end{array}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $0_{V^A} : \begin{array}{l} A \to V \\ x \mapsto 0 \end{array}$.

(b) L'ensemble, noté $\mathrm{Hom}(E, F)$, des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de F^E. On pose $\mathrm{End}(E) := \mathrm{Hom}(E, E)$ et $E^* := \mathrm{Hom}(E, \mathbb{K})$.

Proposition

(a) La composée de deux applications linéaires et la réciproque d'une application linéaire bijective, sont linéaires.

(b) On suppose que E est de dimension finie, de base $(v_1, ..., v_n)$.

Pour tous $w_1, ..., w_n \in F$, il existe $f : E \to F$ linéaire unique telle que :

$$f(v_1) = w_1 \text{ et ... et } f(v_n) = w_n.$$

Dans ce cas : f est bijective si et seulement si $(w_1, ..., w_n)$ est une base de F.

(c) On suppose que E ou F est de dimension finie.

Les espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et seulement si ils sont tous deux de dimension finie et leurs dimensions sont égales.

Définition-Proposition

Soit $f : E \to F$ linéaire.

(a) Le *noyau de f* est le sous-espace vectoriel suivant de E :

$$\mathrm{Ker}\, f := \{v \in E \mid f(v) = 0\}.$$

On a : f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

(b) L'image de (l'application) f est le sous-espace vectoriel suivant de F :

$$\mathrm{Im}\, f := \{w \in F \mid \exists v \in E \;\; f(v) = w\}.$$

On a (clair) : f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

De plus : si $E = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$, alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(f(v_1), ..., f(v_p)\big)$.

(c) On suppose que E ou F est de dimension finie.

On note : $\mathrm{rg}\; f := \dim \mathrm{Im}\, f$.

Ainsi, si $E = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$, alors $\mathrm{rg}\; f = \mathrm{rg}\; \big(f(v_1), ..., f(v_p)\big)$.

Théorème (« formule du rang »)

Soit $f : E \to F$ linéaire. On suppose E de dimension finie.
On a : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \underbrace{E}_{\text{espace de départ}}$.

Corollaire

Soit $f : E \to E$ linéaire avec E de dimension finie. ← [même espace de départ et d'arrivée]
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective ; (ii) f est surjective ; (iii) f est bijective.

Définition-Proposition

(a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
La projection p de E sur F parallèlement à G et *la symétrie s de E par rapport à F parallèlement à G* sont les endomorphismes de E déterminés par :

$$p(u) := v \quad \text{et} \quad s(u) := v - w \quad \text{pour tout } u = v + w \in E \text{ avec } v \in F \text{ et } w \in G$$

(b) Soit $f \in \operatorname{End}(E)$. Il existe une décomposition $E = F \oplus G$ telle que f soit la projection de E sur F parallèlement à G si et seulement si $f \circ f = f$; dans ce cas : $F = \operatorname{Im} f$ et $G = \operatorname{Ker} f$.

On suppose, uniquement pour la caractérisation des symétries qui suit, que $1+1 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$...
Il existe une décomposition $E = F \oplus G$ telle que f soit la symétrie de E par rapport à F parallèlement à G si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}$; dans ce cas : $F = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $G = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id})$.

On suppose maintenant que E, F, G sont de dimension finie.
On fixe des bases $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_p)$ de E, $\mathscr{C} = (w_1, ..., w_n)$ de F, et $\mathscr{D}$ de G.

Définition-Proposition

Soit f une application linéaire de E dans F.

(a) La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ est : $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} f := \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1)/\mathscr{C} & \dots & f(v_p)/\mathscr{C} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \square & \dots & \square \end{pmatrix} \end{array}$.

(b) Il s'agit de l'unique matrice A à n lignes et p colonnes vérifiant :

$$f : v_{/\mathscr{B}} \left| \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{matrix} \right. \longmapsto w_{/\mathscr{C}} \left| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \right. \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

(c) Elle vérifie : $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(f)$, où $\operatorname{rg}(A)$ est l'entier r qui apparait dans la méthode de Gauss.

Définition-Proposition

(a) L'ensemble $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) := \mathbb{K}^{\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,p\}}$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np.

(b) L'application $\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(E,F) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}} f \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Donc $\operatorname{Hom}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \operatorname{Hom}(E,F) = (\dim E)(\dim F)$.

(c) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. On a :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}\, g\big)\big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, f\big).$$

De plus, f est bijective si et seulement si $n = p$ et $\big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, f\big)$ est inversible, et dans ce cas :

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \big(\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\, f\big)^{-1}.$$