Continuité et dérivabilité : à retenir (J-Y D)

On se donne $a, b \in \mathbb{R}$ distincts. Lorsque $a > b$, on note : $[a,b] := [b,a]$ et $]a,b[:=]b,a[$.

Définition-Proposition

On considère $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $l \in \mathbb{R}$.

(a) On dit que f *est continue en* x_0 si : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0,\, x \in I]{} f(x_0)$.

(b) On dit que f *est dérivable en* x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite réelle, notée $f'(x_0)$, quand $\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}$ et $x \in I$.

Par conséquent : $\boxed{\text{si } f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ alors } f \text{ est continue en } x_0}$.

(c) On dit que f est *continue* (resp. *dérivable*) si elle est continue (resp. dérivable) en tout $x \in I$.

Proposition (« formule de Leibniz »)

Soient $f, g : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications n-fois dérivable avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On a : fg est n-fois dérivable et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Théorème (« théorème des valeurs intermédiaires »)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue.

Pour tout $y_0 \in [f(a), f(b)]$, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $y_0 = f(x_0)$.

Ainsi, l'image d'un intervalle infini I par une application continue de I dans $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Théorème (« théorème de l'image continue d'un segment »)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue.

On a : $f([a,b])$ est un segment.

En particulier, il existe $c, d \in [a,b]$ tels que : $f(c) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $f(d) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

Théorème (« théorème de continuité et de dérivabilité de la "réciproque" »)

Soit $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante).

(a) L'application f_0 de I dans $f(I)$ qui envoie x sur $f(x)$ est bijective, et, sa réciproque — souvent notée par <u>abus</u> "f^{-1}" — est continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante).

De plus, l'intervalle $f(I)$ a pour bornes les limites de f aux bornes de I.

(b) On suppose I ouvert. Pour tout $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, on a :

$f(I)$ est un intervalle ouvert, f^{-1} est dérivable en $y_0 := f(x_0)$ et $\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$.

(c)

f	$\sin_{\vert[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$	$\cos_{\vert[0,\pi]}$	$\tan_{\vert]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$
$(f_0^{-1})(y)$	$\arcsin y,\ y \in [-1,1]$	$\arccos y,\ y \in [-1,1]$	$\arctan y,\ y \in \mathbb{R}$
$(f_0^{-1})'(y)$	$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y \in]-1,1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y \in]-1,1[$	$\frac{1}{1+y^2},\ y \in \mathbb{R}$

Théorème (« théorème de Rolle »)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, telle que f est dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

Théorème (« théorème des accroissements finis »)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, telle que f est dérivable sur $]a,b[$.

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$.

Corollaire (« inégalité des accroissements finis »)

Soient $f : \underset{\text{intervalle ouvert non vide}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $k \geq 0$ tel que : $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$.

On a : $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$ pour tous $x, y \in I$.

Intégrabilité : à retenir (J-Y D)

On se donne $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Proposition

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des applications intégrables.

(a) On a : $\underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{« valeur moyenne de } f \text{ sur } [a,b] \text{ »}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\big(a + k\,\frac{b-a}{n}\big)}_{\text{moyenne de } f(a+\frac{b-a}{n}),\ \ldots,\ f(a+n\,\frac{b-a}{n})}$.

(b) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha f + \beta g$ est intégrable et $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(d) On a : $|f|$ est intégrable et $\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Définition-Proposition

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable.

On pose : $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $c \in [a,b]$.
Ainsi : $\underbrace{\int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{existe}} = \underbrace{\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{existe}} + \underbrace{\int_v^w f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{existe}}$ pour tous $u, v, w \in [a,b]$.

Définition

On dit qu'une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et des réels $\alpha_0 = a < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = b$ tels que pour chaque $k \in \{1, \ldots, N\}$ la restriction de f à $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ se prolonge continûment à $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$.

Proposition

(a) Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable.

(b) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$.

Théorème (« théorème fondamental de l'intégration »)

(a) Soient $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $a \in I$.
L'application $F_a : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I de dérivée f.

b) Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable de dérivée f.

On a : $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$. On notera : $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Théorème (« théorème du changement de variable »)

Soient $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi : \underset{\text{intervalle infini}}{J} \longrightarrow I$ de classe C^1, et $u, v \in J$.

On a : $\boxed{\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^v f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$. En pratique : « CV $x := \varphi(t)$, donc $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ ».

Théorème (« théorème d'intégration par parties »)

Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

On a : $\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x}$.

Des primitives usuelles ($a > 0$)

$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte}}$ sur $\mathbb{R}$;

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \text{cte}$ sur $]-a, a[$.