Suites récurrentes (J-Y D)

$\longleftarrow$ [étude générale hors programme]

On considère une application continue $f : \underset{\text{intervalle infini}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que :
$\underbrace{a \in I, f(a) \in I, f(f(a)) \in I, \ldots}_{\substack{a \text{ est dans l'intersection des ensembles} \\ \text{de définition des fonctions } f,\ f \circ f,\ f \circ f \circ f,\ \ldots}}$ (signifie qu'il existe $A \subseteq I$ telle que $a \in A$ et $f(A) \subseteq A$).

Proposition 1 (« *suite définie par une relation de récurrence* »)
Il existe une unique suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $u_0 = a$ et $\underbrace{u_{n+1} = f(u_n)}_{\text{sous-entend que } u_n \in I}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration (idée)

Une récurrence permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition suivante est vraie : $\mathscr{P}(n)$: il existe $(U_0, \ldots, U_n) \in I^{n+1}$ unique tel que $U_0 = a$ et $U_{k+1} = f(U_k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On constate que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le terme U_k dans $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ ne dépend pas de $n \geq k$. On le note u_k. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convient et elle est la seule à convenir. □

Proposition 2
On suppose que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers un point l de I. Alors : $\boxed{f(l) = l}$.

Démonstration

On va passer à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$.
Comme $(u_{n+1})_{n \geq 0}$ est extraite de $(u_n)_{n \geq 0}$, on a : $u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.
De plus, la continuité de f assure que : $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(l)$. D'où le résultat . □

Début de l'étude (cas simples)

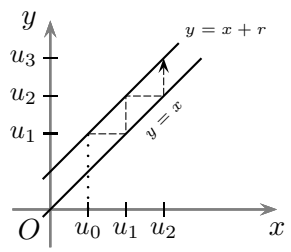
(1) On résout l'équation $f(x) = x$ et étudie les variations de f.
Le signe de $f(x) - x$ fournit la position de la courbe $\mathscr{C} : y = f(x)$ par rapport à la première bissectrice.

(2) On fait une brève étude graphique de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ au brouillon :
– on place (u_0, u_1) sur la courbe $\mathscr{C}$;
– on place (u_1, u_1) sur la 1re bissectrice, puis (u_1, u_2) sur la courbe $\mathscr{C}$;
– on place de même les points (u_2, u_2) et (u_2, u_3) d'abscisse u_2 ;
– ....

Exemples

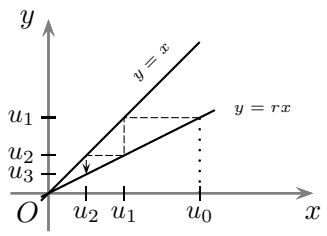
(1) Suite arithmétique de raison r $(r > 0)$:
$u_0 = c$ et $u_{n+1} = u_n + r$ pour $n \geq 0$.

Le dessin est en accord avec : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.



(2) Suite géométrique de raison r $(0 < r < 1)$:
$u_0 = c$ et $u_{n+1} = r u_n$ pour $n \geq 0$.

Le dessin est en accord avec : $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.



Discussion

(1) On suppose que f est croissante et que $\alpha \in I$ vérifie $f(\alpha) = \alpha$.

(a) On a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

Donc : – si $f(a) - a \geq 0$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante ;
– si $f(a) - a \leq 0$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

(b) On a aussi : $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$ pour $n \geq 0$.

Donc : – si $a \leq \alpha$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par α ;
– si $a \geq \alpha$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est minorée par α.

(2) On suppose que f est décroissante et que $\beta \in I$ vérifie $f(\beta) = \beta$.

On note $g := f \circ f$ (définie sur une partie de I), $v_n := u_{2n}$ et $w_n := u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ vérifient $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$ pour tout $n \geq 0$.

Comme g est croissante et $g(\beta) = \beta$, on est ramené au cas (1).

De plus : si $g(a) - a \geq 0$ alors $g(f(a)) - f(a) \leq 0$; si $g(a) - a \leq 0$ alors $g(f(a)) - f(a) \geq 0$. Ainsi : les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ varient en sens contraire.

On pourra utiliser : si $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ convergent vers β, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers β.

(On suppose que : $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = \lim\limits_{q\to+\infty} w_q = \beta$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $P, Q \in \mathbb{N}$ tels que $|v_p - \beta| < \varepsilon$ et $|w_q - \beta| < \varepsilon$ dès que $p \geq P$ et $q \geq Q$. D'où : $|u_n - \beta| < \varepsilon$ dès que $n \geq \max(2P, 2Q+1)$.)

Précisions

On suppose que f est dérivable, et que $l \in I$ vérifie $f(l) = l$.

(a) S'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

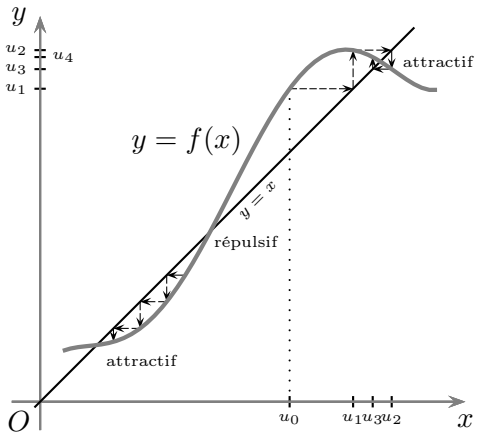
(On utilise l'inégalité des accroissements finis :
$\underbrace{|u_n - l|}_{|f(u_{n-1})-f(l)|} \leq k \underbrace{|u_{n-1} - l|}_{|f(u_{n-2})-f(l)|} \leq k^2 |u_{n-2} - l| \leq \cdots \leq k^n |u_0 - l|$ puis $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.)

(b) On suppose en outre que I est ouvert.

– Si $|f'(l)| < 1$:
on dit que l est « un point attractif » (cf. dessin).

– Si $|f'(l)| = 1$:
cas à étudier plus précisément.

– Si $|f'(l)| > 1$:
on dit que l est « un point répulsif » (cf. dessin).



Les mots « attractif » et « répulsif » font référence à ce qui suit.

– Si $|f'(l)| < 1$: il existe $\eta > 0$ tel que la condition $|u_0 - l| < \eta$ implique que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$;

(On pose : $k = |f'(l)| + \frac{1-|f'(l)|}{2} = \frac{|f'(l)|+1}{2} < 1$. On a : $\frac{|f(x)-f(l)|}{|x-l|} \underset{x\to l,\, x\in I \text{ et } x\neq l}{\longrightarrow} |f'(l)|$.
Il existe donc $\eta > 0$ tel que : $x \in I$ et $\frac{|f(x)-f(l)|}{|x-l|} < k$ dès que $0 < |x - l| < \eta$.
On obtient : $|u_n - l| \leq k |u_{n-1} - l| \leq \cdots \leq k^n |u_0 - l|$ puis $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.)

– Si $|f'(l)| > 1$: il existe $\eta > 0$ tel que la condition $0 < |u_0 - l| < \eta$ implique qu'un des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sort de $]l - \eta, l + \eta[$.

(On pose : $k = |f'(l)| - \frac{|f'(l)|-1}{2} = \frac{|f'(l)|+1}{2} > 1$. On a encore : $\frac{|f(x)-f(l)|}{|x-l|} \underset{x\to l,\, x\in I \text{ et } x\neq l}{\longrightarrow} |f'(l)|$.
Il existe donc $\eta > 0$ tel que : $x \in I$ et $\frac{|f(x)-f(l)|}{|x-l|} > k$ dès que $0 < |x - l| < \eta$.
On suppose par l'absurde que $|u_n - l| < \eta$ pour tout $n \geq 0$.
On a : $|u_n - l| \geq k |u_{n-1} - l| \geq \cdots \geq k^n \underbrace{|u_0 - l|}_{\neq 0}$ puis $|u_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Contradiction.)