

Exercice 1. Quel est le rayon de convergence des deux séries entières

$$S_1(z) = \sum (2^n + (-1)^n) z^n \quad \text{et} \quad S_2(z) = \sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{2n} ?$$

Exercice 2. On note $D \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on ait $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n^3 + 1}$.

Que vaut $f'(0)$ pour une telle fonction ?

Exercice 3. On considère la série entière $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $A(z)$.
2. Lorsque $z \in \mathbb{R}$, comparer $A(z)$ et $\arctan(z)$ [Indication : on pourra calculer la dérivée de $zA(z)$.]
3. En déduire la valeur de $A(1/\sqrt{3})$.

Exercice 4. Soit U un ouvert contenu dans \mathbb{C}^* et soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. On pose $U' = \{1/\bar{z} \mid z \in U\}$. Démontrer que l'application $g : U' \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(z) = \overline{f(1/\bar{z})}$ est holomorphe.
2. On suppose que U est connexe, que $U = U'$ et que $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset U$. Si, pour $|z| = 1$ on a $|f(z)| = 1$, montrer que $\overline{f(1/\bar{z})} f(z) = 1$ pour tout $z \in U$.

Exercice 1. Quel est le rayon de convergence des deux séries entières

$$S_1(z) = \sum \left(3^n + \frac{(-1)^n}{n} \right) z^n \quad \text{et} \quad S_2(z) = \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{4n} ?$$

Exercice 2. On note $D \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Déterminer toutes les fonctions holomorphes $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on ait $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+n}{n^2+1}$.

Que vaut $f'(0)$ pour une telle fonction ? Même question avec $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin(n)}{n}$.

Exercice 3. On considère la série entière $A(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n(n-1)}$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $A(z)$.
2. Lorsque $z \in \mathbb{R}$, comparer $A(z)$ et $\log(z)$ [Indication : on pourra calculer la dérivée de $A(z)$.]
3. En déduire la valeur de $A(1/2)$.

Exercice 4. On rappelle qu'une fonction $u(x, y)$ dépendant de deux variables réelles est *harmonique* si elle est deux fois continûment différentiable et vérifie $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

1. Soit $P(x, y) = x^2 - y^2 + x + 1$ et $R(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$.
 - a) Trouver une fonction $Q(x, y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle que $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ soit holomorphe.
 - b) Existe-t-il une fonction $S(x, y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telle que $g(x + iy) = R(x, y) + iS(x, y)$ soit holomorphe ?
2. a) Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, montrer que $f(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ est une fonction holomorphe.
 - b) On suppose que $F(z)$ est une primitive holomorphe de $f(z)$ (c'est-à-dire que $F'(z) = f(z)$). Montrer que $\Re F(x + iy) = u(x, y) + C$, pour une constante $C \in \mathbb{R}$.

FH6 : Contrôle 1 (13/02/2024)

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse doit être justifiée. Durée: 1h.

Exercice 1 : questions de cours.

- (1) Soit U un ouvert de \mathbb{C} , soit $z_0 \in U$ et soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Donner la définition de : l'application f est analytique en z_0 .
- (2) Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$. On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Que peut-on dire de son rayon de convergence R_c ?

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_c$, comment peut-on écrire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$?

- (3) On écrit une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ sous la forme :

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y), \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + iy \in U,$$

les applications P et Q étant à valeurs réelles.

Que disent les équations de Cauchy-Riemann?

Exercice 2 : nombre de dérangements. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous noterons $[[1; n]]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n . Soit \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de $[[1; n]]$, c'est-à-dire des bijections de $[[1; n]]$ sur lui-même. On rappelle que $\text{Card } \mathfrak{S}_n = n!$

On dit que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un *dérangement* de $[[1; n]]$ si :

$$\forall k \in [[1; n]], \quad \sigma(k) \neq k.$$

Nous notons \mathcal{D}_n l'ensemble des dérangements de $[[1; n]]$ et nous posons $d_n = \text{Card } \mathcal{D}_n$.

Par convention, nous posons $d_0 = 1$. Nous admettons l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n! \tag{0.1}$$

- (1) Démontrer que la série entière :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n}{n!} z^n$$

a un rayon de convergence $R \geq 1$. Nous noterons S la somme de cette série entière.

- (2) Développer en série entière l'application $z \mapsto e^z S(z)$ sur le disque ouvert $\mathring{D}(0, 1)$. En déduire que :

$$\forall z \in \mathring{D}(0, 1), \quad S(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

- (3) Déduire de ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

- (4) Question bonus : prouver l'égalité (0.1).

Rappels préliminaires à l'exercice 3 (vous admettez ces résultats) :

- (1) La valeur de l'intégrale de Gauss est donnée par l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

- (2) *Théorème d'interversion série-intégrale.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
On suppose que $\sum |f_n|$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une application intégrable sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(t)| dt < +\infty.$$

Alors, nous avons l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Exercice 3 : une transformée de Laplace.

- (1) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale impropre suivante converge :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{-t^2} dt.$$

- (2) À l'aide d'un changement de variable, prouver l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} e^{x^2/4}.$$

- (3) Expliquer pourquoi il est légitime de définir l'application $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, L(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt} e^{-t^2} dt.$$

- (4) Démontrer que L est entière¹ en utilisant le deuxième rappel ci-dessus.
(5) Dédire de ce qui précède l'égalité :

$$\forall z \in \mathbb{C}, L(z) = \sqrt{\pi} e^{z^2/4}. \quad (0.2)$$

- (6) Développer en série entière sur \mathbb{C} les deux membres de l'égalité (0.2).
En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \frac{(2k)!}{4^k k!}.$$

¹C'est-à-dire holomorphe sur \mathbb{C} .

FH6 : Contrôle 1 (12/02/2025)

Aucun document n'est autorisé. Toute réponse doit être justifiée. Durée: 45 minutes.

Exercice 1 : questions de cours. Dans la suite, on note U un ouvert de \mathbb{C} .

- (1) Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, et soit $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Énoncer le théorème d'inversion locale holomorphe.
- (2) Donner une formule "universelle" pour déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
- (3) Donner la définition d'une application analytique $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Exercice 2 : relèvement Soit $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application continue. On appelle *relèvement* continu de u toute application continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad u(t) = \exp(f(t)).$$

- (1) Démontrer que, si f et g sont deux relèvements continus de u , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que l'application $f - g$ est constante et égale à $2ik\pi$.
- (2) Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout $t \in [0, 1]$, $u(t) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Donner explicitement un relèvement continu de u .
- (3) On suppose que u est de classe C^1 .
 - (a) On choisit $c \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(c) = u(0)$. Justifier que c'est possible.
 - (b) On définit l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t) = c + \int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)} ds.$$

Démontrer que f est un relèvement continu de u . On pourra prouver que l'application $t \mapsto u(t) \exp(-f(t))$ est constante.

Exercice 3. On note Log_P la détermination principale du logarithme, définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \text{Log}_P z := \ln |z| + i \text{Arg}_P z$$

où $\text{Arg}_P z$ est l'unique $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.

Le but de l'exercice est de déterminer s'il existe une application holomorphe $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $h(1) = 1$ et $(h(z))^3 = z$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (1) Soit $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \exp\left(\frac{1}{3} \text{Log}_P z\right)$. Démontrer que, si une telle application h existe, alors sa restriction à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est nécessairement égale à g .
- (2) Soit $t \in \mathbb{R}_-$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $z_n = t + \frac{i}{n}$. Calculer $\lim \text{Arg}_P z_n$ (une justification par un dessin est acceptée), puis $\lim g(z_n)$.
- (3) En considérant de façon analogue la suite $(\overline{z_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, conclure.

