Partiel du 18 mars (durée : 1h30)

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence de la série $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Exercice 2. (Lemme de Schwarz) On note $D = D(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 et rayon 1. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$.

1. On définit $g(z) := f(z)/z$ si $z \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$. Montrer que $g(z)$ est holomorphe sur D.
2. En appliquant le principe du maximum à $g(z)$ sur le disque fermé $|z| \leq r$ (pour $r < 1$), montrer que $|g(z)| \leq 1$. En déduire les inégalités
$$\forall z \in D,\ |f(z)| \leq |z| \qquad \text{et} \qquad |f'(0)| \leq 1 \tag{0.1}$$
3. Montrer que, de plus, si $|f(z_0)| = |z_0|$ pour un $z_0 \neq 0$, alors $f(z) = az$ avec $|a| = 1$.

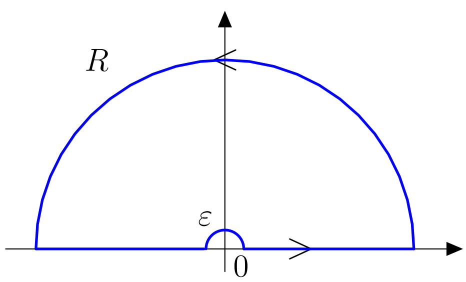
Exercice 3. On définit classiquement $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, puis $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$.

1. Vérifier que $\cos z$ et $\sin z$ sont entières et que $\tan z$ définit une fonction holomorphe hors de $Z := \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Écrire le développement en série entière en 0 de $\cos z$ et $\sin z$; vérifier que le développement de $\tan z$ peut s'écrire
$$\tan z = \sum_{m=0}^{\infty} t_m z^{2m+1} \tag{0.2}$$
3. Donner une relation de récurrence déterminant t_n en fonction de $t_0, \ldots, t_{n-1}$ et $t_0 = 1$.
4. Calculer t_1 et t_2.

Exercice 4. On se propose de déterminer la valeur de l'intégrale $A := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note γ_r le demi-cercle de diamètre $[-r, r]$ situé dans le demi-plan $\mathrm{Im} z \geqslant 0$ et parcouru dans le sens direct. Pour tout $0 < \varepsilon < R$, on note $\gamma_{R,\varepsilon}$ le lacet : γ_R puis $[-R, -\varepsilon]$ puis $-\gamma_\varepsilon$ puis $[\varepsilon, R]$ (voir dessin).



1. Démontrer que $\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\, dz = 0$.
2. Montrer que la somme des intégrales sur les deux segments horizontaux vaut $2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x} dx$.
3. Montrer $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0$ [on pourra admettre que, la fonction $\sin(t)$ étant *concave* (i.e. $\sin'' t \leq 0$) sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a, sur cet intervalle, $\sin(t) \geq 2t/\pi$.]
4. Calculez $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale intégrale $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

partiel (contrôle n° 2) du 16 mars 2023

Exercice 1. *Déterminer le rayon de convergence de la série* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$. *Déterminer une relation entre* $S(z)$ *et* $\cos(z)$ *et en déduire la valeur de* $S(\pi^2)$.

Exercice 2. *On note* $D = D(0,1)$ *le disque ouvert de centre* 0 *et rayon* 1. *Pour* $a \in D$ *on définit*

$$h_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

1. *Montrer que, si* $|z| = 1$ *alors* $|h_a(z)| = 1$.
2. *En déduire que* $h_a(D) \subset D$. *[Indication : on pourra utiliser le principe du maximum.]*
3. *Calculer* $h_a \circ h_{-a}(z)$ *et en déduire que* h_a *définit une bijection de* D *sur* D.

Exercice 3. *Soit* U *un ouvert connexe, borné, de* $\mathbb{C}$ *et* $f : U \to U$ *holomorphe. On suppose qu'il existe un point* $z_0 \in U$ *tel que* $f(z_0) = z_0$. *On pose* $f_n = f \circ \cdots \circ f$ *(n fois).*

1. *Montrer que* $f_n(z)$ *est uniformément bornée (i.e. bornée indépendamment de* n *et* $z \in U$*).*
2. *Soit* $k \geq 0$ *entier, montrer que* $|f_n^{(k)}(z_0)|$ *est borné indépendamment de* n. *[Indication : on pourra utiliser la formule de Cauchy, dont on rappellera l'énoncé.]*
3. *Montrer que* $f_n'(z_0) = (f'(z_0))^n$ *et en déduire* $|f'(z_0)| \leq 1$.
4. *On suppose* $f'(z_0) = 1$. *Montrer que si* $f(z) = z + a_m(z-z_0)^m + \ldots$ *alors* $f_n(z) = z + na_m(z-z_0)^m + \ldots$ *et en déduire que* f *est l'application identité.*

Exercice 4. *On se propose de déterminer la valeur des deux intégrales*

$$A := \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx := \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \cos(x^2)dx \qquad \text{et} \qquad B := \int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx := \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \sin(x^2)dx.$$

Pour cela on considère, pour $R > 0$, *le contour* γ *constitué du segment* $[0, R]$ *suivi de l'arc de cercle de centre* 0 *et rayon* R *joignant* R *à* $Re^{i\pi/4}$ *dans le sens direct, suivi du segment allant de* $Re^{i\pi/4}$ *à* 0.

1. *Écrire une paramétrisation du contour* γ *(en trois morceaux) et en déduire une expression de* $\int_\gamma e^{iz^2}dz$ *comme somme de trois intégrales ordinaires.*
2. *Expliquez pourquoi* $\int_\gamma e^{iz^2}dz = 0$.
3. *Montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle est majorée par* C/R *pour une constante* C *adéquate. [Indication : on pourra utiliser l'inégalité* $\sin(2t) \geq 4t/\pi$, *valable pour* $0 \leq t \leq \pi/4$.*]*
4. *On note* $I := \int_0^\infty e^{-x^2}$ *(en fait* $I = \sqrt{\pi}/2$, *ce qu'on ne demande pas de démontrer). En faisant tendre* R *vers l'infini dans les calculs précédents, exprimer les intégrales* A *et* B *en termes de* I.

Partiel du 12 mars 2024

Attention : Il est conseillé de faire l'exercice 1 avant l'exercice 2.

Rappels sommation par paquet (pour les exercices 1 et 2)

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* si l'ensemble

$$\left\{\sum_{i\in J} a_i \mid J \text{ sous-ensemble fini de } I\right\}$$

est majoré. On définit $\sum_{i\in I} u_i$ comme la borne supérieure de cet ensemble.
On aura besoin du résultat suivant que l'on admet :

Théorème : Soit $I = \coprod_{n\in\mathbb{N}} I_n$ une partition. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux assertions suivantes sont vraies :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.
- La série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Dans ce cas on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Dans la question 7 on aura besoin de l'énoncé suivant :

Proposition : Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes telle que la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable alors la somme $\sum_{i\in I} u_i$ est bien définie et pour toute partition $I = \coprod_{n\in\mathbb{N}} I_n$, on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Exercice 1. Analycité des séries entières

Soit $R > 0$ le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ et

$$f : D(0,R) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sum a_n z^n.$$

Le but de cet exercice est de montrer que f est une fonction analytique (comme dans le cours).

1. Donner la définition de "f est une fonction analytique".

2. Ecrire (sans le montrer) $f'(z)$ sous la forme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence.

3. Soit $z_o \in D(0,R)$. Montrer par récurrence sur p la formule suivante

$$f^{(p)}(z_o) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}\, z_o^q.$$

4. Dire pourquoi la série de droite est absolument convergente et en déduire que

$$|f^{(p)}(z_o)| \leq \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{q!} |a_{p+q}|\, |z_o^q|.$$

5. Pour $r < R - |z_o|$, montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} |z_o|^q r^p$$

est convergente et en déduire que

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!q!} |a_{p+q}||z_o|^q r^p = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} |z_o|^q r^p$$

(Il faudra montrer en particulier que la série de gauche est bien convergente).

6. En déduire que la série de Taylor de f au point z_o converge pour $|z - z_o| < R - |z_o|$.

7. En utilisant la proposition montrer que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z - z_o)^n$$

pour tout $z \in D(z_o, R - |z_o|)$ et conclure.

Exercice 2. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On dit que z_o sur le cercle unité (i.e. $|z_o| = 1$) est un point *singulier* s'il n'existe pas de fonction holomorphe définie au voisinage de z_o qui coincide avec f partout où les deux sont définies. On suppose que les coefficients a_i sont positifs. Le but de cet exercice est de montrer que 1 est un point singulier.

1. Calculer les coefficients A_n de la série de Taylor de f au voisinage de $1/2$

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} A_n (z - 1/2)^n$$

en fonction de a_n.

2. Soit R' le rayon de convergence de la série $\sum A_n (z - 1/2)^n$. Montrer que si $z \in D(1/2, R')$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge et

$$f(z) = g(z).$$

Indication : Ecrire z sous la forme $1/2 + h$ avec $|h| < R'$, justifier l'existence de la somme

$$\sum_{p,q\geq 0} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} (1/2)^q h^p$$

et montrer que $f(1/2+h)$ et $g(1/2+h)$ sont deux écritures de cette somme.

3. En déduire que le rayon de convergence de $g(z)$ est exactement $1/2$.

4. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, on admet que la série de Taylor d'une fonction holomorphe $\Omega \to \mathbb{C}$ en $z_o \in \Omega$ converge sur tout disque de centre z_o contenu dans Ω (analycité des fonctions holomorphes). Montrer par l'absurde que 1 est un point singulier.

Exercice 3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour $z = x + iy$ on pose

$$P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Donner une condition suffisante et nécessaire sur a, b, c pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est donnée par P. Déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette condition.

Partiel du 11 mars 2025

Exercice 1. On considère le rectangle $R = \{x + iy \mid -r < x < r, -s < y < s\}$ et un chemin γ de support le bord ∂R de R parcouru une seule fois . Calculer les deux intégrales

$$\int_R \frac{1}{z^2} dz, \qquad \int_R Re(z) dz.$$

Exercice 2. Soit U l'ouvert $\mathbb{C}$ privé du segment $[0, 1]$ et $f : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z}.$$

Montrer que pour tout lacet γ dans U, on a

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Exercice 3. Considérons l'ouvert

$$U = \mathbb{C} \backslash \{iy, \, y \in \mathbb{R}, \, |y| \geq 1\}.$$

1. Montrer que pour $z \in U$, on a

$$\frac{i - z}{z + i} \notin \mathbb{R}_-.$$

2. Calculer la primitive F de la fonction

$$f : U \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{1}{1 + z^2}$$

qui s'annule en 0.

3. Montrer que F est impaire, i.e. que $F(-z) = -F(z)$.

Exercice 4. Calculer le rayon de convergence de la série de Taylor en zéro de la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{1 + e^z}.$$

Exercice 5. (Cours)
Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, z_o un centre de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que cette fonction vérifie la propriété suivante :

$$\int_\theta f(z)dz = 0$$

pour tout circuit triangulaire θ tracé dans Ω.

Pour $z \in \Omega$ soit σ_z le segment qui relie z_o à z. On considère la fonction

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \int_{\sigma_z} f(u)du.$$

On veut montrer que F est une primitive de f.

1. Soit $z \in \Omega$, $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \Omega$. Soit v tel que $z + v \in D(z, r)$. Faire un dessin et montrer que le contour du triangle $(z_o, z, z + v)$ est dans bien Ω.

2. Soit δ un chemin allant de z à $z + v$ ayant pour support le segment $[z, z + v]$. Montrer que

$$F(z + v) - F(z) = \int_\delta f(u)du.$$

3. On choisit pour δ le paramétrage

$$\delta(t) = z + tv$$

avec $0 \leq t \leq 1$.

Montrer que

$$F(z + v) - F(z) - vf(z) = v \int_0^1 (f(z + tv) - f(z))dt.$$

4. En déduire que $F'(z)$ existe et que $F'(z) = f(z)$.