

Exercice 1. Soit a un nombre complexe vérifiant $|a| \neq 1$. On note γ le chemin $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$.

1. Calculer la valeur de

$$J(a) = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(az-1)}.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos(t) + a^2}.$$

Exercice 2. On note γ_1 le contour fermé constitué du segment $[-R, R]$ parcouru en croissant suivi de l'arc de cercle $\gamma_{1,R}$ de centre 0, rayon R dans le demi-plan supérieur ($\Im z > 0$) et γ_2 le contour fermé constitué du segment $[-R, R]$ parcouru en croissant suivi de l'arc de cercle $\gamma_{2,R}$ de centre 0, rayon R dans le demi-plan inférieur ($\Im z < 0$). Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé on note $f(z) = e^{itz}/(1+x^2)$.

1. Dessiner les deux contours avec leurs orientations.
2. Justifier que la fonction $f(z)$ est méromorphe sur \mathbb{C} et calculer les résidus en chaque pôle.
3. Déterminer la valeur de $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ et de $\int_{\gamma_2} f(z)dz$.
4. Montrer que, si $t \geq 0$ on a $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz = 0$.
5. En déduire, quand $t \geq 0$, la valeur de la transformée de Fourier suivante

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dx}{1+x^2}.$$

6. Modifier le calcul précédent pour obtenir la valeur de $G(t)$ pour $t < 0$.

Exercice 3. Soit $D = D(0, 1)$ le disque ouvert de centre 0 et rayon 1 et $a \in D$. On pose

$$\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

1. Montrer que ϕ_a est holomorphe sur D et continue sur \bar{D} .
2. Montrer que $|\phi(e^{it})| = 1$ et en déduire que $\phi_a(D) \subset D$. [On peut procéder directement ou utiliser le principe du maximum.]
3. Conclure que ϕ_a définit une bijection holomorphe de D vers D .

contrôle n° 3

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones ne sont pas autorisés. L'épreuve dure 45 minutes.

Exercice 1. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $z \neq k - \frac{1}{2}$, on pose $h_k(z) = \frac{(-1)^k}{z - k + \frac{1}{2}}$.

- Démontrer que les séries de fonctions $\sum_{k \geq 0} (h_k(z) - h_k(0))$ et $\sum_{k \geq 0} (h_{-k}(z) - h_{-k}(0))$ convergent normalement sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$. En déduire que la série de fonctions $\sum_{\ell \geq 0} (h_\ell(z) + h_{-1-\ell}(z))$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$.

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$, on pose $g(z) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell(z) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (h_\ell(z) + h_{-1-\ell}(z))$.

- Démontrer que la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$, qu'elle est paire et que l'on a $g(z+1) = -g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$.
- Quelle est la nature de la singularité de $g(z)$ en $z = k - \frac{1}{2}$ et quel est le résidu de g en ce point ?
- Démontrer qu'il existe une fonction entière f satisfaisant

$$f(z) = \frac{\pi}{\cos \pi z} - g(z)$$

pour $z \notin \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

- Démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $|z - k| > \frac{1}{2}$, on a

$$\left| h_k(z) + h_{k+1}(z) \right| \leq \frac{1}{|k - z|^2 - \frac{1}{4}}.$$

- Démontrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x + it) = 0$ uniformément en $x \in [0, 1]$.
- Démontrer que $f = 0$.
- En déduire l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

[Indication : on pourra calculer la valeur $g(0)$.]

Questions de cours

Exercice 1. Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert $D(a, r)$ et continue sur le disque fermé.

1. Énoncer le principe du maximum pour la fonction $f(z)$.
2. Donner une version de la formule de Cauchy pour la fonction $f(z)$.

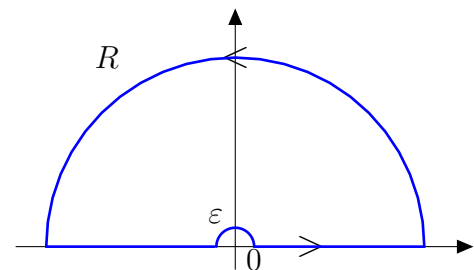
Problèmes

Exercice 2. Soit $D = D(0, 1)$ le disque ouvert et $f : D \rightarrow D$ une fonction holomorphe. On suppose que $f(0) = 0$.

1. Montrer l'existence d'une fonction $g(z)$ holomorphe telle que $f(z) = zg(z)$. Que vaut $g(0)$?
2. Soit $r < 1$, montrer que $\sup_{|z| \leq r} |g(z)| \leq 1/r$.
3. En déduire que $|g(z)| \leq 1$.
4. Conclure que l'on a $|f'(0)| \leq 1$ et, pour tout $z \in D$, l'inégalité $|f(z)| \leq |z|$.
5. On suppose qu'il existe $z_0 \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Que peut-on conclure ?

Exercice 3. Soit f l'application de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C} définie par $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

Pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on note γ_r le demi-cercle de diamètre $[-r, r]$ situé dans le demi-plan $\text{Im}z \geq 0$ et parcouru dans le sens direct. Pour tout $0 < \varepsilon < R$, on note $\gamma_{R,\varepsilon}$ le lacet : γ_R puis $[-R, -\varepsilon]$ puis $-\gamma_\varepsilon$ puis $[\varepsilon, R]$ (voir dessin).



1. Justifier soigneusement que $\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0$.

2. Calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz$.

3. Montrer que $\int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt$ et que cette intégrale est majorée par π/R .

Conclure que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$. [Indication : on pourra utiliser l'inégalité, valable pour $t \in [0, \pi/2]$, qui dit que $\sin t \geq 2t/\pi$.]

4. En déduire la valeur de l'intégrale $I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

CC3 (durée : 45 mn)

Rappel (à utiliser sans justification)

Soient F une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} et $a \in \Omega$ tel que $F(a) = 0$.

Il existe une unique application holomorphe $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $F(z) = (z - a)h(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Questions de cours

- a) Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $|f(z)| \leq |z|^{\frac{1}{2}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Démontrer que $f = 0$.
- b) Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ et $g: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe.
(i) Quand dit-on que z_0 est un pôle de g de multiplicité k ?
(ii) Quand dit-on que z_0 est un point singulier essentiel de g ?

Exercices

Il est possible d'obtenir une note correcte en ne traitant que deux des trois exercices.^(*)

- 1) On pose : $\Omega := \mathbb{C} \setminus i] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
- a) Prouver qu'il existe au plus une fonction holomorphe sur Ω qui prolonge $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- b) Démontrer qu'il existe bien une fonction holomorphe sur Ω qui prolonge $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Indication : on rappelle que $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} contenant le cercle unité $\mathcal{C}(0, 1)$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note : $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.
Le but de cet exercice est de déterminer les applications holomorphes $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :
(*) $f(U_n) \subseteq U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc en particulier $f(1) = 1$ (cas $n = 1$).
On se donne une telle application f puis fixe $\varepsilon > 0$ tel que
 $B(0, \varepsilon) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid e^{2i\pi z} \in \Omega \text{ et } f(e^{2i\pi z}) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\}$ (on admet qu'il existe un tel $\varepsilon > 0$).
- a) On pose : $g(z) = \frac{1}{z} \text{Log}_P(f(e^{2i\pi z}))$ pour tout $z \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$.
Démontrer que g a un prolongement holomorphe h à $B(0, \varepsilon)$.
- b) Remarquer que $\exp(g(\frac{1}{n})) = 1$ quand $n \in \mathbb{N}$ et $n > \frac{1}{\varepsilon}$, puis démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que h est constante et égale à $2i\pi k$.
- c) En déduire que $f(Z) = Z^k$ pour tout $Z \in \Omega$.
- d) Quel est l'ensemble des applications holomorphes sur Ω vérifiant (*)?
- 3) Soient $a_1, \dots, a_n \in B(0, 1)$ distincts avec $n \geq 1$ et $f: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.
On suppose que : $f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0$ et $|f| \leq 1$.
On pose : $R(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}$ pour $z \in \overline{B(0, 1)}$ (après avoir constaté que $|\overline{a_k}z| < 1$).
- a) Démontrer que $|R(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$.
- b) Prouver qu'il existe une application holomorphe $g: B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :
 $f(z) = g(z)R(z)$ pour tout $z \in B(0, 1)$.
- c) Soit $r \in]0, 1[$. On note : $m(r) = \inf_{|z|=r} |R(z)|$.
Prouver que, lorsque $m(r) \neq 0$, on a : $|g(z)| \leq \frac{1}{m(r)}$ pour tout $z \in \overline{B(0, r)}$.
- d) Démontrer, en utilisant (b) et (c) puis (a), que : $|f(z)| \leq |R(z)|$ pour tout $z \in B(0, 1)$.

(*) **Barème** : Question de cours sur 6 + 4 points ; 1) sur 4+4 points ; 2) sur 2+6+6+2 points ; 3) sur 2+4+4+8 points.

