Examen 1

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. L'épreuve dure 3 heures.

Exercice 1. On pose $D = D(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 de rayon 1. Une fonction $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ est dite *unitaire* si elle est holomorphe sur D continue sur $\overline{D}$ et de module 1 sur ∂D.

1. Soit $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ une fonction unitaire sans zéro. Montrer que $|\frac{1}{\varphi(z)}| \leq 1$ pour tout $z \in D$. Conclure que φ est constante.
2. Soit $\varphi : \overline{D} \to \mathbb{C}$ une fonction unitaire non constante. Prouver que φ a un nombre fini non-nul de zéros et que $|\varphi| < 1$ sur D.
3. Prouver que si $a \in D$, alors $\varphi_a : \overline{D} \ni z \to \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ est unitaire.
4. Prouver que les fonctions unitaires sont, à une constante multiplicative près, les produits finis de fontions de type φ_a avec $a \in D$.
5. Montrer que si φ est une fonction unitaire injective, alors elle est surjective et il existe $c \in \mathbb{C}, |c| = 1, a \in D$ telle que $\varphi(z) = c\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

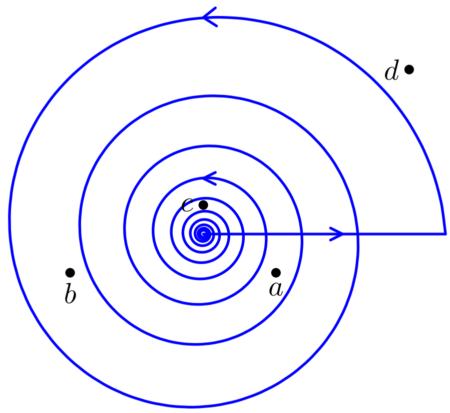
Exercice 2. 1. Soit $f(x) = \frac{x^3}{(x^2+1)^2}$. Pour $t \in \mathbb{R}, R \in [0, +\infty[$, on pose

$$I(R,t) = \int_0^\pi e^{itRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta,$$

Pour $t > 0$ fixé, montrer que $I(R,t) \to 0$ quand $R \to +\infty$.

2. Montrer que l'intégrale $Q(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin(tx)}{(x^2+1)^2} dx$ converge pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $Q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit γ le lacet dessiné ci-contre, parcouru une fois dans le sens indiqué.
Déterminer en fonction de a, b et c les intégrales suivantes :



1. $\int_\gamma \frac{z^2 dz}{(z-b)(z-d)}$
2. $\int_\gamma \frac{z dz}{(z-b)(z-c)^2}$
3. $\int_\gamma \frac{\sin z}{(z-a)^2} dz$

Exercice 4. 1. Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe et sans zéro sur U.

(a) Montre qu'il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ telle que $h' = f'/f$ sur U.
(b) Conclure qu'il existe $g \in \mathcal{O}(U)$ telle que $e^g = f$.
(c) Si $g_1 \in \mathcal{O}(U)$ telle que $e^{g_1} = f$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que $g = g_1 + 2\pi ik$ sur U.

Soient A un ensemble discret et fermé de $\mathbb{C}$ et $\nu \in (\mathbb{N}^*)^A$. On voudrait montrer qu'il existe une fonction entière f telle que les zéros de f sont A et $\nu_a(f) = \nu(a)$ pour tout $a \in A$. De plus les fonctions ayant ces propriétés sont celles de la forme $e^h f$ avec h entière.

2. Démontrer le résultat ci-dessus quand l'ensemble A est fini.

Dans la suite, on suppose que A est infini et on ordonne ses éléments en une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $|a_n| \leq |a_{n+1}|$.

3. Montrer que $\lim_n |a_n| = +\infty$.

4. Pour $n > 0$, montrer qu'il existe un polynôme T_n en z tel que

$$\left|\nu(a_n)\log(1-\frac{z}{a_n}) - T_n(z)\right| \leq 2^{-n}, \forall z \in D(0, |a_n|/2),$$

   où "log" désigne une détermination holomorphe du logarithme sur $U = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

   On pose $f_n = (1-\frac{z}{a_n})^{\nu(a_n)} e^{-T_n(z)}$.
5. Montrer que la suite de fonctions $g_n(z) = (z-a_0)^{\nu(a_0)} \prod_{k=1}^n f_k(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
6. On note $f(z) = \lim_n g_n(z)$. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que l'ensemble des zéros de f est A et $\nu_a(f) = \nu(a)$ pour tout $a \in A$.
7. Montrer que si g est une fonction entière f telle que les zéros de f sont A et $\nu_a(f) = \nu(a)$ pout tout $a \in A$, alors il existe h fonction entière telle que $g = e^h f$.

Examen de rattrapage

Les exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. L'épreuve dure 3 heures.

Notations. On note $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur le plan complexe ; si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et a est un pôle de f, la *partie principale* de f en a est l'unique polyôme $Q(X) = q_1X + q_2X^2 + \cdots + q_rX^r$ tel que $f(z) - Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$ soit holomorphe sur un voisinage de a.

Exercice 1. Soit $S(z)$ la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $S(z)$.
2. Donner le développement en série entière de $S'(z)$ et $S''(z)$; quel est leur rayon de convergence ?
3. Montrer que $S(z)$ est solution de l'équation différentielle
$$z^2S''(z) + zS'(z) + (z^2 - 1)S(z) = 0$$
4. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) = \exp(it)$, calculer l'intégrale
$$I = \int_\gamma \frac{S(z)}{z^2}$$

Exercice 2. Soit A un ensemble discret et fermé de $\mathbb{C}$. Pour chaque $a \in A$, on se donne un polynôme P_a non-nul s'annulant en 0. On veut montrer qu'il existe $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ dont les pôles sont les éléments de A, et dont la partie principale (c.a.d. singulière) en $a \in A$ est $R_a : z \to P_a(\frac{1}{z-a})$; de plus toute solution du problème posé est de la forme $f + h$ avec h une fonction entière.

1. Démontrer le résultat ci-dessus quand l'ensemble A est fini.

   Dans la suite, on suppose que A est infini et on le note $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose, sans perte de généralité, que pour tout $n \geq 0$ on a $|a_n| \leq |a_{n+1}|$.
2. Montrer que $\lim_n |a_n| = +\infty$.
3. Pour $n > 0$, montrer qu'il existe un polynôme T_n en z tel que
$$\left|P_{a_n}\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - T_n(z)\right| \leq 2^{-n}, \forall z \in D(0, |a_n|/2).$$
4. Montrer que la suite de fonctions $g_n(z) = P_{a_0}(\frac{1}{z-a_0}) + \sum_{k=1}^{n}\left(P_{a_k}(\frac{1}{z-a_k}) - T_k(z)\right)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus A$.
5. On note $f(z) = \lim_n g_n(z)$. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, que les pôles sont les éléments de A, et que la partie principale (c.a.d. singulière) de f en $a \in A$ est égale à $R_a : z \to P_a(\frac{1}{z-a})$.
6. Si g est une autre solution du problème posé, alors $g - f$ est une fonction entière.

Exercice 3. Soit $0 < \alpha < 1$.

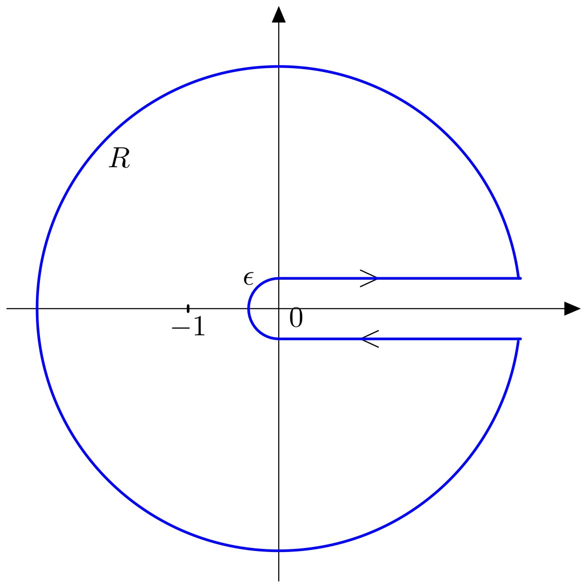
1. Expliquer pourquoi on peut définir $\log z$ une fonction holomorphe $\log : \mathbb{C}\setminus[0, +\infty[\to \mathbb{C}$, avec la convention que la partie imaginaire de $\log z$ appartient à l'intervalle $]0, 2\pi[$. Calculer $|e^{\alpha \log z}|$ pour $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ (avec $x < 0$, si $y = 0$).

2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, on pose
$$f(z) = \frac{e^{\alpha \log z}}{z^2 + z + 1}.$$
On choisit $\epsilon \in]0, 1[$ et $R > 1$. On introduit le chemin fermé $\gamma = \gamma_{\epsilon,R}$ décomposé en quatre morceaux :
• $\gamma_1 = \gamma_1(\epsilon, R)$ est le segment horizontal $[\epsilon i, R' + \epsilon i]$;
• $\gamma_2 = \gamma_1(\epsilon, R)$ est l'arc de cercle de centre 0, de rayon R, parcouru dans le sens trigonométrique, joignant le point $R' + \epsilon i$ au point $R' - \epsilon i$ (de sorte que $R'^2 + \epsilon^2 = R^2$) ;
• $\gamma_3 = \gamma_3(\epsilon, R)$ est le segment horizontal $[-\epsilon i, R' - \epsilon i]$ parcouru en sens inverse ;
• $\gamma_4 = \gamma_4(\epsilon)$ est l'arc de cercle de centre 0 et rayon ϵ reliant $-\epsilon i$ à $+\epsilon i$, l'angle variant dans le sens inverse du sens trigonométrique.

(Cf la figure ci-dessous.)

Calculer les résidus de la fonction $f(z)$ en chaque pôle.

En déduire la valeur de $\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)dz$.



3. Montrer que, lorsque R est fixé et ϵ tend vers zéro, l'intégrale $\int_{\gamma_4} f(z)dz$ tend vers zéro.
4. Montrer que quand ϵ tend vers zéro, $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ tend vers $\int_0^R \frac{x^\alpha}{x^2+x+1} dx$ et calculer la limite de $\int_{\gamma_3} f(z)dz$.
5. Montrer que, lorsque R tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ tend vers zéro.
6. En déduire le calcul de$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2+x+1} dx$.

Examen 1

Les quatre exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. L'épreuve dure 3 heures.

Exercice 1. Soit f, g deux fonctions entières sur $\mathbb{C}$ telle que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que f/g est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Déduire que $f = cg$ avec $c \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.
1. Démontrer que la fonction f définie par $f(z) = e^{1/z} - \frac{1}{z}$ est holomorphe et possède une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. Est ce que f est méromorphe en 0 ? Justifier votre réponse.
3. Soit γ le cercle unité orienté dans le sens direct. Calculer l'intégrale $I = \int_\gamma e^{1/z}\, dz$.

Exercice 3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $B = \{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}(z) < b\}$. On note ∂B le bord du domaine B et $\overline{B} = B \cup \partial B$ son adhérence. Soit f une fonction continue sur $\bar{B}$, holomorphe sur B et bornée. On pose $\|f\|_B = \sup_{z\in B} |f(z)|$. Pour $a \leq x \leq b$, posons $M_f(x) = \sup_{\mathrm{Re}\, z = x} |f(z)|$.

1. Supposons que $M_f(a) = M_f(b) = 1$.
   (a) Pour $\varepsilon > 0$, et $z \in \overline{B}$, posons $h_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+\varepsilon(z-a)}$. Montrer que $|fh_\varepsilon| \leq 1$ sur ∂B et que pour tout $z \in \overline{B}$,
   $$\varepsilon |\mathrm{Im} z| |f(z) h_\varepsilon(z)| \leq \|f\|_B.$$
   (b) Soit R_ε le rectangle $\overline{B} \cap \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im} z| \leq \|f\|_B/\varepsilon\}$. Prouver que $|fh_\varepsilon| \leq 1$ sur R_ε.
   (c) Conclure que $|fh_\varepsilon| \leq 1$ sur $\overline{B}$, puis que, pour tout $z \in \overline{B}$, on a $|f(z)| \leq 1$.
2. Supposons que $M_f(a) M_f(b) > 0$.
   (a) On pose $g(z) = M_f(a)^{\frac{b-z}{b-a}} M_f(b)^{\frac{z-a}{b-a}}$. Montrer que $1/g$ est holomorphe sur B.
   (b) Montrer que $|f/g| \leq 1$ sur $\overline{B}$.
   (c) Conclure que
   $$M_f(x)^{b-a} \leq M_f(a)^{b-x} M_f(b)^{x-a} \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{1}$$
3. Supposons que $M_f(a) M_f(b) = 0$. Pour $\delta > 0$, on pose $f_\delta(z) = f(z) + \delta$.
   (a) Montrer qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que $M_{f_\delta}(a) > 0, M_{f_\delta}(b) > 0$ pour tout $0 < \delta < \delta_0$.
   (b) Montrer que $\forall z = x + iy \in \overline{B}$,
   $$|f(z) + \delta|^{b-a} \leq M_{f_\delta}(a)^{b-x} M_{f_\delta}(b)^{x-a}.$$
   (c) Conclure que $f = 0$ sur $\overline{B}$.
4. En considérant sur la bande $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ la fonction
   $$f(z) = \exp\Big(\exp\Big[i\pi(z - \frac{1}{2})\Big]\Big),$$
   vérifier que l'hypothèse 'f bornée' est essentielle pour (1).

Tourner la page SVP

Exercice 4. Soit $a, b \in [0, +\infty[$. Soit

$$f(z) = \frac{z \exp(aiz - biz^{-1})}{1 + z^2}.$$

Pour $0 < \epsilon < 1 < R$, On introduit le chemin fermé $\gamma = \gamma_{\epsilon,R}$ décomposé en quatre morceaux :
• $\gamma_1 = \gamma_1(\epsilon, R)$ est le segment horizontal $[\epsilon, R]$;
• $\gamma_2 = \gamma_2(\epsilon, R)$ est le demi-cercle de centre 0, de rayon R, parcouru dans le sens trigonométrique, joignant le point R au point $-R$;
• $\gamma_3 = \gamma_3(\epsilon, R)$ est le segment horizontal $[-R, -\epsilon]$
• $\gamma_4 = \gamma_4(\epsilon)$ est le demi-cercle de centre 0 et rayon ϵ reliant $-\epsilon$ à $+\epsilon$, l'angle variant dans le sens inverse du sens trigonométrique.

1. En appliquant le théorème des résidus à la fonction $f(z)$, calculer la valeur de $\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)dz$.
2. Montrer que, lorsque R est fixé et ϵ tend vers zéro, l'intégrale $\int_{\gamma_4} f(z)dz$ tend vers zéro.
3. Montrer que, lorsque R tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ tend vers zéro. [Indication : on pourra utiliser l'inégalité $\sin t \geq 2t/\pi$, valable pour $0 \leq t \leq \pi/2$.]
4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax - bx^{-1})}{1+x^2} dx$ est bien définie.
5. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax - bx^{-1})}{1+x^2} dx$.

Examen de rattrapage

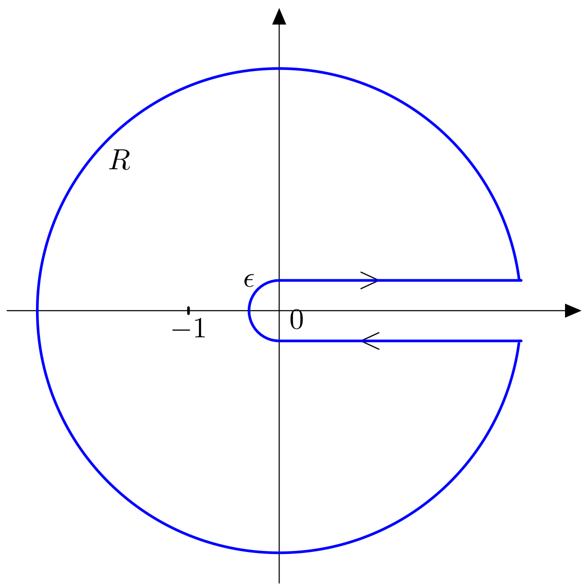
Les deux exercices sont indépendants. Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. L'épreuve dure 3 heures. On note $\mathrm{Re}(z)$ *et* $\mathrm{Im}(z)$ *la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe* z*.*

Exercice 1. On note $D(0,r)$, la disque de centre 0, de rayon r.

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Montrer de même que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement sur $D(0,1/2)$.
   Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, on pose
   $$g(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}.$$
2. Démontrer que la fonction g est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, et que l'on a $g(z+1)=g(z)$ pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.
3. Soit $n\in\mathbb{Z}$ un entier, quelle est la nature de la singularité de $g(z)$ en $z=n$? Quel est le résidu de $g(z)$ en ce point ?
4. Démontrer qu'il existe une fonction entière f satisfaisant
   $$f(z)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}-g(z)$$
   pour $z\notin\mathbb{Z}$.
5. Soit $b>0$ un réel. Montrer qu'il existe une constante C telle que
   $$|g(z)|\leq C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b^2+n^2}\qquad \forall z\in\mathbb{C}, \mathrm{Im}(z)\geq b.$$
6. Démontrer que $\lim_{t\to+\infty} f(x+it)=0$ uniformément pour $x\in[0,1]$.
7. Conclure que $f=0$.
8. Soit $h(z)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}-\frac{1}{z^2}$. Montrer qu'il existe $r>0$ tel que sur $D(0,r)$, la fonction $h(z)$ est holomorphe et son développement en série entière s'écrit :
   $$h(z)=\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi^4}{15}z^2+\sum_{k>1}^{\infty}a_k z^{2k}.$$
9. En déduire l'égalité
   $$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$
10. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$ et $b \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}\, b < 1$.

1. Est-ce que $\log z$ est bien définie comme une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ avec la convention que la partie imaginaire de $\log z$ appartient à l'intervalle $]0, 2\pi[$. Calculer $|e^{b \log z}|$ pour $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ (avec $x < 0$, si $y = 0$).
2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, on pose
$$f(z) = \frac{a}{(1 + az)e^{b \log z}}.$$
On choisit $\epsilon > 0$ suffisamment petit et R suffisamment grand, de sorte que $0 < \epsilon < |a|^{-1} < R$ et, si $\mathrm{Re}(a) \leq 0$, on suppose aussi $\epsilon < \mathrm{Im}(a^{-1})$ [Ces conditions assurent que $-a^{-1}$ est à l'intérieur du chemin défini ci-dessous.]
On introduit le chemin fermé $\gamma = \gamma_{\epsilon,R}$ décomposé en quatre morceaux (Cf la figure ci-dessous.) :
• $\gamma_1 = \gamma_1(\epsilon, R)$ est le segment horizontal $[\epsilon i, R' + \epsilon i]$;
• $\gamma_2 = \gamma_2(\epsilon, R)$ est l'arc de cercle de centre 0, de rayon R, parcouru dans le sens trigonométrique, joignant le point $R' + \epsilon i$ au point $R' - \epsilon i$ (de sorte que $R'^2 + \epsilon^2 = R^2$) ;
• $\gamma_3 = \gamma_3(\epsilon, R)$ est le segment horizontal $[-\epsilon i, R' - \epsilon i]$ parcouru en sens inverse ;
• $\gamma_4 = \gamma_4(\epsilon)$ est l'arc de cercle de centre 0 et rayon ϵ reliant $-\epsilon i$ à $+\epsilon i$, l'angle variant dans le sens inverse du sens trigonométrique.



Calculer le résidu de la fonction $f(z)$ en chaque pôle.
En déduire la valeur de $\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)dz$.
3. Montrer que, lorsque R est fixé et ϵ tend vers zéro, l'intégrale $\int_{\gamma_4} f(z)dz$ tend vers zéro.
4. Montrer que, quand ϵ tend vers zéro, $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ tend vers $\int_0^R \frac{a}{(1+ax)x^b} dx$ et calculer la limite de $\int_{\gamma_3} f(z)dz$.
5. Montrer que, lorsque R tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ tend vers zéro.
6. Calculer $I_a(b) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{(1+at)t^b} dt$.

Université Paris Cité
Fonctions holomorphes L3

Année 2023-2024

Examen du 17 mai 2024

Exercice 1. (Cours)

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Formule intégrale de Cauchy

Considérons un disque ouvert D de centre z_o et de rayon R. Soit $F : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

Pour tout $0 < r < R$ on considère le circuit

$$\gamma_r(t) = z_o + re^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

Le but de cette partie est de montrer la formule intégrale de Cauchy pour un disque : pour tout a tel que $|a - z_o| < r$ on a

$$F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{F(z)\,dz}{z-a}. \tag{1}$$

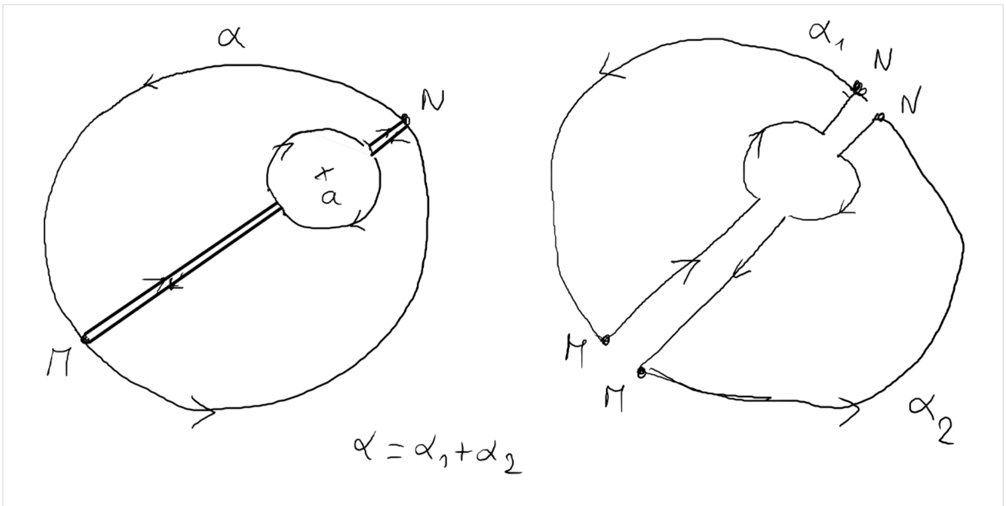
On fixe donc $a \in D$ tel que $|a - z_o| < r$ et soit ε un nombre réel tel que

$$0 < \varepsilon < r - |z_o - a|.$$

On introduit le circuit

$$\delta_\varepsilon(t) = a + \varepsilon e^{it} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

1. Soit α la somme des deux circuits α_1 et α_2 représentés sur le dessin ci-dessous (les cercles étant parcourus une seule fois). Montrer que α_1 (puis α_2) est un circuit dans un ouvert étoilé contenu dans $D\backslash\{a\}$ que l'on explicitera sur un dessin par exemple.



2. En utilisant un théorème du cours, en déduire que toute fonction holomorphe H sur $D\backslash\{a\}$ vérifie

$$\int_\alpha H(z)dz = 0.$$

3. Soit $G : D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$G(z) = \frac{F(z) - F(a)}{z - a}.$$

Montrer que

$$\int_{\gamma_r} G(z)dz = \int_{\delta_\varepsilon} G(z)dz.$$

4. Montrer que G se prolonge par continuité sur D.

5. En déduire qu'il existe un disque Δ de centre a et un réel $M > 0$ tel que

$$|G(z)| \leq M$$

pour tout $z \in \Delta$.

6. Soit ℓ le rayon de Δ. Montrer que pour $\varepsilon < \ell$ on a

$$\left| \int_{\delta_\varepsilon} G(z)dz \right| \leq 2\pi\varepsilon M.$$

7. En déduire que

$$\int_{\gamma_r} G(z)dz = 0$$

puis montrer la formule (1).

<u>Partie 2 :</u>

Soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ et une fonction complexe φ continue sur le support de γ. On considère la fonction

$$F : \mathbb{C}\backslash\mathrm{Supp}(\gamma) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \int_\gamma \frac{\varphi(u)}{u - z} du.$$

Le but de cette partie est de montrer que F est analytique.

1. Soit $a \notin \mathrm{Supp}(\gamma)$. Soient $0 < r < r'$ des réels tels que

$$\overline{D(a, r')} \cap \mathrm{Supp}(\gamma) = \emptyset.$$

Montrer que pour tout $z \in \overline{D(a, r)}$ et $u \in \mathrm{Supp}(\gamma)$ on a

$$\frac{|z - a|}{|u - a|} \leq \frac{r}{r'} < 1.$$

2. Montrer que pour $z \in \overline{D(a,r)}$ fixé, la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^k}{(u-a)^{k+1}}.$$

converge normalement sur le support de γ.

3. Montrer que $z \in \overline{D(a,r)}$ et $u \in \text{Supp}(\gamma)$

$$\frac{1}{u-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^k}{(u-a)^{k+1}}$$

4. Montrer que

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (z-a)^k \int_\gamma \frac{\varphi(u)du}{(u-a)^{k+1}}.$$

5. Conclure.

<u>Partie 3 :</u> Analycité des fonctions holomorphes.

Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit $z_o \in \Omega$, $R > 0$ tel que $D(z_o, R) \subset \Omega$. En utilisant les deux premières parties montrer que F est analytique sur un voisinage ouvert de z_o.

Exercice 2. Donner la nature de la singularité de F en z_o et l'ordre si c'est un pôle, et calculer le résidu de F en z_o dans les cas suivants :

1. $F(z) = \frac{2z+3}{(z-1)^3 e^z}$, $z_o = 1$.

2. $F(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos(z)}$, $z_o = \pi$.

Exercice 3. Soient P et Q des polynômes non nuls à coefficients réels tels que $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$ et P et Q sont premiers entre eux. On suppose que Q n'a pas de zéros réels et on note $a_1, \ldots, a_k$ ses zéros de partie imaginaire strictement positive.

1. Pour $R > 0$ soit c_R le demi-cercle de diamètre $[-R, R]$ contenu dans le demi-plan supérieur

$$c_R(t) = Re^{it} \qquad (0 \leq t \leq \pi).$$

Montrer que pour R assez grand on a

$$2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{res}(P/Q, a_j) = \int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{c_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz.$$

2. Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{c_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0.$$

3. En déduire une formule pour

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

en fonction des résidus de P/Q en $a_1,\dots,a_k$.

4. En utilisant la question 3 calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(x+1)}{(x^2+1)^2}dx.$$

Exercice 4. Soit $a>1$. En appliquant le théorème des résidus à un contour et une fonction convenables, calculer l'intégrale

$$I(a)=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+\cos(t)}$$

Examen du 15 mai 2025

Exercice 1.
On définit la fonction sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 3x - 3\mathrm{i}y + 4$$

avec $z = x + \mathrm{i}y$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Montrer que f est une fonction entière.

Exercice 2. (Cours)

On admet le théorème suivant du cours :

<u>Théorème</u> : Toute fonction holomorphe f sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est analytique sur Ω. De plus pour tout $a \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $D(a, r) \subseteq \Omega$, la série de Taylor de f en a converge absolument en tout point de $D(a, r)$.

Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert Ω.

1. Soit z_0 un zéro de F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un voisinage ouvert $V \subseteq \Omega$ de z_0 tel que $F(z) = 0$ pour tout $z \in V$.
(ii) Pour tout $k \geq 0$, $F^{(k)}(z_0) = 0$.

2. On se donne dans cette question 2 un zéro z_0 de F qui ne vérifie pas (i).

2.1. Montrer qu'il existe un plus petit entier non nul p tel que

$$F^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

2.2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $V \subseteq \Omega$ de z_0 et une fonction holomorphe f sur V telle que

$$F(z) = (z - z_0)^p f(z)$$

pour tout $z \in V$ et $f(z_0) \neq 0$.

2.3. Montrer que f peut se prolonger en une fonction holomorphe F_1 sur Ω tel que

$$F(z) = (z - z_0)^p F_1(z)$$

pour tout $z \in \Omega$.

3. Montrer que si z_0 est un zéro de F qui ne vérifie pas (i), il existe un voisinage de z_0 sur lequel F n'a pas d'autre zéro que ce point.

4. (Principe du prolongement analytique)

On suppose que Ω est connexe.

4.1. On note U l'ensemble des $z \in \Omega$ tels que F est nulle sur un voisinage ouvert de z dans Ω. Montrer que U est ouvert et fermé dans Ω.

4.2 En déduire que si F est nulle sur un disque ouvert D inclus dans Ω alors F est nulle sur tout Ω.

Exercice 3.

Soient f et g deux fonctions entières non identiquement nulles telles que $|f(z)| \leq |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Soit z_0 un zéro de g. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction g ne s'annule pas sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ et $\frac{f}{g}$ admet un prolongement holomorphe à $D(z_0, r)$.

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On note $h(z_0) = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$ si $g(z_0) \neq 0$, et $h(z_0) = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z)}{g(z)}$ si $g(z_0) = 0$.

Montrer que h est une fonction entière.

3. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda g$.

Exercice 4. Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\sin(2z^2 + 3z + 1)}{z - \pi} dz$$

où γ parcourt une fois dans le sens indirect le cercle de centre π et de rayon 1.

Exercice 5.

Trouver la série de Laurent de f en z_0 en précisant la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence :

1. $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^3}$ en $z_0 = 0$.
2. $f(z) = \sin(1/z)$ en $z_0 = 0$.

Exercice 6.

Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 7.

Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\frac{5\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} \, \mathrm{d}\theta.$$

Indications :

– on rappelle que $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$;

– on posera $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et remarquera que $\frac{\sin^2(\frac{5\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})} = \frac{(z^4+z^3+z^3+z+1)^2}{z^4}$.