

## 0. CONNEXITÉ

- 1) a) Démontrer que toute partie convexe de  $\mathbb{R}^n$  est connexe.  
b) Donner un exemple de partie connexe de  $\mathbb{R}^2$  qui n'est pas convexe.
- 2) a) Le complémentaire de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^2$  est-il connexe ?  
b) Démontrer que le complémentaire de  $\mathbb{Q}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  est connexe par arcs.  
*Indication* : joindre deux points de  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}^2} \setminus \mathbb{Q}^2$  avec 2 ou 3 segments horizontaux et verticaux.
- 3) Soient  $\arg_1, \arg_2: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$  continues vérifiant :  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \quad z = |z| e^{i \arg_1(z)} = |z| e^{i \arg_2(z)}$ .  
Démontrer qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \quad \arg_2(z) = \arg_1(z) + 2k\pi$ .
- 4) a) Démontrer que  $S^1$  n'est pas homéomorphe au segment  $[0, 1]$ .  
b) Démontrer de même que  $\mathbb{R}^2$  n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .
- 5) a) Démontrer que la sphère  $S^n$  est connexe par arcs lorsque  $n \neq 0$ .  
*Indication* : on pourra faire intervenir la surjection canonique de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  sur  $S^n$ .  
b) Démontrer que le groupe spécial orthogonal  $SO(n)$  est connexe par arcs.  
*Indication* : quand  $n \geq 2$ , on pourra utiliser des rotations dans certains plans vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ .
- 6) On considère une partie  $A$  d'un espace topologique  $X$ .
  - a) Soit  $C$  une partie connexe de  $X$  qui rencontre à la fois  $A$  et son complémentaire dans  $X$ .  
Démontrer que  $C$  rencontre la frontière de  $A$ .
  - b) Soit  $\gamma$  un chemin joignant un point de  $A$  à un point du complémentaire de  $A$  dans  $X$ .  
Démontrer que l'image de  $\gamma$  coupe la frontière de  $A$ .
- 7) Soit  $A$  une partie connexe d'un espace topologique  $X$ .
  - a) Démontrer que  $\overline{A}$  est connexe.
  - b) La partie  $\overset{\circ}{A}$  de  $X$  est-elle toujours connexe ?
- 8) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  
Démontrer que :  $\Omega$  est connexe si et seulement si  $\Omega$  est connexe par arcs.
- 9) On note  $X$  l'adhérence dans  $\mathbb{R}^2$  du graphe de  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  .  
$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$
  - a) La partie  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  est-elle connexe ?
  - b) Est-elle connexe par arcs ?