

Espaces topologiques connexes : à retenir (J-Y D)

(à connaître dans le cas des espaces métriques)

On considère un espace topologique X .

Définition

(a) On dit que l'espace topologique X est *connexe* si X n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides.

(b) Soient $a, b \in X$. On appelle *chemin dans X d'origine a et d'extrémité b* (ou « chemin de a à b dans X ») une application continue $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow X$ avec $t_0 < t_1$ telle que $\gamma(t_0) = a$ et $\gamma(t_1) = b$. Dans un cours de topologie algébrique, les chemins sont par convention définis sur $[t_0, t_1] := [0, 1]$.

(c) On dit que l'espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous $a, b \in X$ il existe un chemin de X qui a pour origine a et pour extrémité b .

On conserve la même notion de « connexité par arcs » en imposant la condition $[t_0, t_1] := [0, 1]$.

Proposition

(a) L'espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante. *A fortiori* la réunion de connexes de X qui ont un point commun est connexe.

(b) L'image d'une application continue d'un espace topologique connexe (resp. connexe par arcs) dans un espace topologique est connexe (resp. connexe par arcs).

(c) Un produit de deux espaces topologiques non vides est connexe (resp. connexe par arcs) si et seulement si chacun des deux est connexe (resp. connexe par arcs).

Proposition

(a) Les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.

Par conséquent, lorsque X est connexe toute application continue de X dans \mathbb{R} qui prend des valeurs α et β prend aussi toutes les valeurs entre α et β (« théorème des valeurs intermédiaires »).

(b) Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.

(c) Pour tout point x_0 de X , il existe un plus grand connexe (resp. connexe par arcs) de X contenant x_0 . On l'appelle « la composante connexe (resp. connexe par arcs) de x_0 dans X ».

Notation

Soient $a, b, c \in X$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ un chemin de a à b et $\delta: [0, 1] \rightarrow X$ un chemin de b à c .

La *composée de γ et δ au sens des chemins* est le chemin $\gamma\delta: t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$ de a à c .

Remarque

(a) Soient $a, b \in X$. On dit que deux chemins γ_0 et γ_1 de a à b dans X , définis sur un même segment $[t_0, t_1]$, sont *homotopes (comme chemins)* si :

il existe $c: [0, 1] \times [t_0, t_1] \rightarrow X$ continue telle que
$$\begin{cases} \forall s \in [0, 1] & c_s(t_0) = a \text{ et } c_s(t_1) = b. \\ (s, t) & \mapsto c_s(t) \\ c_0 = \gamma_0 & \text{ et } c_1 = \gamma_1 \end{cases}$$

L'homotopie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de a à b définis sur $[t_0, t_1]$.

(b) Soient $a, b, c \in X$, $\gamma_0, \gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins homotopes de a à b et $\delta_0, \delta_1: [0, 1] \rightarrow X$ deux chemins homotopes de b à c . Les chemins $\gamma_0\delta_0$ et $\gamma_1\delta_1$ de a à c sont homotopes.

(c) Soient $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$. Soient $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ un chemin de a_1 à a_2 , $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ un chemin de X joignant a_2 à a_3 , et $\gamma_3: [0, 1] \rightarrow X$ un chemin de X joignant a_3 à a_4 .

Les chemins $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ et $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ sont en général différents, mais ils sont homotopes.