

## I. FONCTIONS HOLOMORPHES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

### Fonctions holomorphes

**Exercice 1.** Les applications suivantes sont-elles holomorphes sur  $\mathbb{C}$ ? Si oui, calculer leur dérivée.

$$a: z \mapsto \bar{z}; \quad b: z \mapsto |z|^2 = z\bar{z}; \quad c: z \mapsto \operatorname{Re} z; \quad d: z \mapsto z^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

**Exercice 2.**

(a) Prouver que si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et  $\operatorname{Im} f = 0$ , alors  $f$  est constante.

(b) Déterminer toutes les fonctions holomorphes  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sachant que l'on a

$$\operatorname{Im}(f(x + iy)) = -x + 3y + 5 \text{ pour } x, y \in \mathbb{R}, \text{ et } f(0) = 5 + 5i.$$

**Exercice 3.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de classe  $C^2$  de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ .

On suppose que  $f$  est holomorphe. Démontrer que  $f'$  est holomorphe.

### Détermination principale du logarithme

**Exercice 4.** On note  $\operatorname{Log}_P$  la « détermination principale du logarithme », définie par :

$$\operatorname{Log}_P z := \ln r + i \operatorname{Arg}_P z \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-,$$

où  $\operatorname{Arg}_P z$  est l'unique  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $z = re^{i\theta}$  avec  $-\pi < \theta < \pi$ .

(a) Parmi les formules ci-dessous lesquelles sont vraies, quand les deux membres ont un sens?

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \exp(\operatorname{Log}_P(z)) = z; & \text{(ii)} \quad & \operatorname{Log}_P(\exp(z)) = z; \\ \text{(iii)} \quad & \operatorname{Log}_P(z^{-1}) = -\operatorname{Log}_P(z); & \text{(iv)} \quad & \operatorname{Log}_P(z^2) = 2\operatorname{Log}_P(z). \end{aligned}$$

(b) Vérifier que les applications

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} + i] -\pi, \pi[ & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \text{et} & g: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} + i] -\pi, \pi[ \\ z & \longmapsto & \exp z & & v & \longmapsto & \operatorname{Log}_P v \end{array}$$

sont définies et réciproques l'une de l'autre

(c) Calculer  $\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{Log}_P z$  et  $\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ \operatorname{Im} z < 0}} \operatorname{Log}_P z$  pour  $t \in ]-\infty, 0[$ .

**Exercice 5.** On note  $\sqrt{\cdot}_P$  la « détermination principale de la racine carrée », définie par :

$$\sqrt{z}_P := e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log}_P z} \text{ pour } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-.$$

(a) Quand peut-on écrire  $\sqrt{z^2}_P = z$ ?

(b) Vérifier que les applications

$$\begin{array}{ccc} c: ]0, +\infty[ + i\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \text{et} & r: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \longrightarrow & ]0, +\infty[ + i\mathbb{R} \\ z & \longmapsto & z^2 & & v & \longmapsto & \sqrt{v}_P \end{array}$$

sont définies et réciproques l'une de l'autre

(c) Montrer que  $\sqrt{\cdot}_P$  est holomorphe et  $\frac{d}{dz} \sqrt{z}_P = \frac{1}{2\sqrt{z}_P}$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .

(d) Construire une fonction holomorphe  $f: \mathbb{C} \setminus [-1, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  telle que :

$$f(z)^2 = z(z + 1), \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 0].$$

## Fonctions harmoniques

**Exercice 6.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $u$  une application de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $u$  est *harmonique* si elle est de classe  $C^2$  et vérifie  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

- Démontrer que la partie réelle d'une fonction holomorphe (de classe  $C^2$ ) est harmonique.
- Démontrer que la fonction  $u(z) = \ln |z|$  est harmonique sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- Soit  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction harmonique. Démontrer que  $z \mapsto \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$  est holomorphe.

## Séries entières

**Exercice 7.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

- $\sum n^n z^n$  ;
- $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$  ;
- $\sum n^\alpha z^n$  où  $\alpha \in \mathbb{R}$  ;
- $\sum z^{2^n}$  ;
- $\sum n^n z^{n^2}$ .

**Exercice 8.** Soit  $S$  la somme d'une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

Démontrer que  $S$  est paire si et seulement si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $a_{2n+1} = 0$ .

**Exercice 9.** Développer en série entière en 0 les fonctions suivantes :

- $f : z \mapsto \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  ;
- $g : z \mapsto \frac{e^z}{1-z}$  ;
- $h : z \mapsto \text{Log}_P(1+z)$ .

## Fonctions analytiques

**Exercice 10.** On fixe  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .

- Calculer la série de Taylor de  $\text{Log}_P$  en  $z_0$  et son rayon de convergence  $R$ .
- Décrire l'ensemble des  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  tels que la somme de la série de Taylor de  $\text{Log}_P$  en  $z_0$  est égale à  $\text{Log}_P$  dans  $B(z_0, R) \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ .

**Exercice 11.** On considère les deux séries entières  $(\sum z^n)_{n \geq 0}$  et  $(\sum \frac{z^n}{n})_{n \geq 1}$ .

- Étudier leur comportement sur leurs cercles de convergence.

*Indication :* on admettra la « règle d'Abel ». (\*)

- On note :  $S_1(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$  et  $S_2(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$  sur les disques ouverts de convergence.

Prouver que, pour tout  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , les applications  $S_1$  et  $S_2$  ont un prolongement analytique défini sur un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  contenant  $z_0$ , qui est maximal.

- Lesquelles de ces applications  $S_1$  et  $S_2$  ont un plus grand prolongement analytique défini sur un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  ?

---

(\*) Règle d'Abel. Soient  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $\mathbb{C}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  une suite dans un espace de Banach complexe  $E$  ; si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $(\sum_{n \geq 1} |u_{n+1} - u_n|)_{n \geq 1}$  converge, et  $(\sum_{k=1}^n v_k)_{n \geq 1}$  est bornée, alors  $(\sum u_n v_n)_{n \geq 1}$  converge.

(Critère de Cauchy avec :  $\sum_{n=p}^q u_n v_n = -u_p V_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (u_n - u_{n+1}) V_n + u_q V_q$ , où  $V_n := \sum_{1 \leq k \leq n} v_k$  pour  $n \geq 0$ .)