

# Fonctions holomorphes : à retenir (J-Y D)

## Définition-Proposition

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  et  $z_0 \in \Omega$ .

(a) On dit que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  si  $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$  a une limite quand  $z \rightarrow z_0$  avec  $z \neq z_0$ .

Dans ce cas, on note :  $f'(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ .

(b) On a :  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  si et seulement si  $f$  est différentiable en  $z_0$  et l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $df(z_0): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire.

Dans ce cas, on a :  $df(z_0) \cdot h = f'(z_0)h$  pour tout  $h \in \mathbb{C}$ .

(c) On dit que  $f$  est holomorphe si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de  $\Omega$ .

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions holomorphes sont holomorphes, avec les formules de dérivations usuelles.

(d) On pose :  $f(z) = P(z) + iQ(z)$  avec  $P(z) \in \mathbb{R}$  et  $Q(z) \in \mathbb{R}$  pour tout  $z \in \Omega$ .

On a :  $f$  est holomorphe si et seulement si  $f$  est différentiable et vérifie

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{« équations de Cauchy-Riemann »} .^{(*)}$$

## Proposition (« théorème d'inversion locale holomorphe »)

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe et  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $f'(z_0) \neq 0$ .

Il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  inclus dans  $\Omega$  qui contient  $z_0$  et un ouvert  $V$  de  $\mathbb{C}$  qui contient  $f(z_0)$  tels que  $f(U) \subseteq V$ ,  $f_{U,V}: U \rightarrow V$  est bijective et  $g: V \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe.

$$u \mapsto f(u) \qquad v \mapsto f_{U,V}^{-1}(v)$$

Dans ce cas, on a :  $g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$ .

## Définition-Proposition

(a) Pour tout  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ , on note :  $e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

L'application exponentielle  $\exp: z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$  est holomorphe avec  $\exp' = \exp$ .

(b) On définit, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; & \text{si } z \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}: & \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}; & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}; & \text{si } z \notin i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbb{Z}: & \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}. \end{aligned}$$

Les formules trigonométriques, puis les formules hyperboliques, restent valables sur  $\mathbb{C}$ .<sup>(\*\*)</sup>

## Définition-Proposition

Soient  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $z_0 \in \Omega$ .

(a) Pour tous  $z, L \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\begin{aligned} e^L = z &\iff e^{\operatorname{Re} L} e^{i \operatorname{Im} L} = z \iff (z \neq 0 \text{ et } e^{\operatorname{Re} L} = |z| \text{ et } e^{i \operatorname{Im} L} = \frac{z}{|z|}) \\ &\iff (z \neq 0 \text{ et } L \equiv \ln |z| + i \arg z [2i\pi]). \end{aligned}$$

En particulier, l'application  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a pour image  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

(b) On appelle *détermination continue du logarithme* dans  $\Omega$  toute application continue  $L$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  qui vérifie :  $e^{L(z)} = z$  pour tout  $z \in \Omega$ .

Cela équivaut à la condition suivante :

$$L \text{ est holomorphe, } L'(z) = \frac{1}{z} \text{ pour tout } z \in \Omega \text{ et } e^{L(z_0)} = z_0.$$

Quand il existe une telle application  $L$ , les autres déterminations continues du logarithme sur  $\Omega$  sont les applications  $L + 2ik\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

(\*) On peut démontrer que :  $f$  est holomorphe si et seulement si  $f$  est continue et  $f$  admet des dérivées partielles qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann (« théorème de Loomon-Menchoff »).

(\*\*) Cela découlera aussi immédiatement du « principe du prolongement analytique ».

## Définition-Proposition

(a) On définit une détermination continue du logarithme sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ , appelée « détermination principale du logarithme » et notée  $\text{Log}_P$ , par :

$$\text{Log}_P z := \ln r + i\theta \quad \text{quand } z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \text{ avec } r > 0 \text{ et } -\pi < \theta < \pi.$$

On note, avec  $\theta$  ci-dessus :  $\text{Arg}_P(z) := \theta$  « détermination principale de l'argument de  $z$  ».

(b) Les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} + i] -\pi, \pi[ & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \\ z & \longmapsto & \exp z \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R} + i] -\pi, \pi[ \\ v & \longmapsto & \text{Log}_P v \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

(c) Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

## Définition-Proposition (curiosité)

(a) On définit une fonction holomorphe appelée « détermination principale de la racine carrée » et notée ici  $\sqrt{\cdot}_P$ , en posant :

$$\sqrt{z}_P := e^{\frac{1}{2} \text{Log}_P z} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-.$$

(b) Les applications

$$\begin{array}{ccc} ]0, +\infty[ + i\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- & \longrightarrow & ]0, +\infty[ + i\mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \sqrt{v}_P \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

## Définition-Proposition (curiosité)

On se donne  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{C})$  inversible. On rappelle que :  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

On introduit l'ensemble  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , où  $\infty$  est un nouvel élément qui n'appartient pas à  $\mathbb{C}$ .

On posera :  $\frac{u}{0} := \infty$  pour tout  $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

(a) On définit une fonction holomorphe  $h_A$  appelée « homographie associée à  $A$  », en posant :

$$h_A(z) := \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}.$$

(b) Les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & h_A(z) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ v & \longmapsto & h_{A^{-1}}(v) \end{array}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

(c) Il existe une topologie sur  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (« topologie de la sphère de Riemann ») pour laquelle les voisinages d'un nombre complexe  $z_0$  sont les parties contenant  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$  pour un  $\varepsilon > 0$ , et les voisinages de  $\infty$  sont les parties contenant  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > M\}$  pour un  $M > 0$ .

On prolonge  $h_A$  et  $h_{A^{-1}}$  en des homéomorphismes réciproques de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sur  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , par :

$$h_A(-\frac{d}{c}) = \infty \text{ et } h_A(\infty) = \frac{a}{c}, \quad h_{A^{-1}}(\frac{a}{c}) = \infty \text{ et } h_{A^{-1}}(\infty) = -\frac{d}{c}.$$