

Fonctions analytiques : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

Soit A un ensemble. On note \mathbb{C}^A l'ensemble des applications de A dans \mathbb{C} .

(a) On appelle *série de nombres complexes* une suite $(u_n, \sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ avec $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, notée $(\sum u_n)_{n \geq 0}$. Elle converge si et seulement si la suite $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ converge.

(b) Soit $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ une série convergente dans \mathbb{C} . On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$.

(c) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs. On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k \leq +\infty$.

(d) On dit qu'une série $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{C} est *absolument convergente* si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

(e) On appelle *série d'applications de A dans \mathbb{C}* une suite $(\sum f_n)_{n \geq 0}$ de la forme $(f_n, \sum_{k=0}^n f_k)_{n \geq 0}$ où $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite dans \mathbb{C}^A . Elle converge simplement (respectivement uniformément) si et seulement si la suite $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n \geq 0}$ converge simplement (respectivement uniformément).

(d) Soit $(\sum f_n)_{n \geq 0}$ une série simplement convergente dans \mathbb{C}^A . On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k$.

(e) On dit qu'une série $(\sum f_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{C}^A est *normalement convergente* si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$.

Proposition

Soit A un ensemble.

(a) Pour toute série $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ convergente dans \mathbb{C} , on a :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \leq +\infty.$$

(b) Toute série absolument convergente $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{C} est convergente.

(c) Pour toute série $(\sum f_n)_{n \geq 0}$ uniformément convergente dans \mathbb{C}^A , on a :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} 0 \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq +\infty.$$

(d) Toute série normalement convergente $(\sum f_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{C}^A est uniformément convergente.

(e) Soient $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ et $(\sum v_n)_{n \geq 0}$ des séries absolument convergentes dans \mathbb{C} .

La « série produit » $(\sum w_n)_{n \geq 0}$ définie par $w_n := \sum_{p+q=n} u_p v_q$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Définition

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(a) On appelle *limite inférieure* de $(u_n)_{n \geq 0}$ la limite de la suite croissante $(\inf_{k \geq n} u_k)_{n \geq 0}$.

On la note : $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \varliminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} u_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(b) On appelle *limite supérieure* de $(u_n)_{n \geq 0}$ la limite de la suite décroissante $(\sup_{k \geq n} u_k)_{n \geq 0}$.

On la note : $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} u_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition

Soit $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ une série dans \mathbb{C} .

(a) « Règle de Cauchy » :

← [limite supérieure dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$]

- si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ donc $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ converge ;
- si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$: $u_n \not\rightarrow 0$ donc $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

(b) « Règle de D'Alembert »^(*) lorsque $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$:

← [limite dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$]

- si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1$: $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ converge ;
- si $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell > 1$: $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

Définition

On appelle *série entière* une série d'applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $(\sum a_n z^n)_{n \geq 0}$ avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \geq 0$, où $a_n z^n$ désigne l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n \in \mathbb{C}$.

Définition-Proposition

Soient $(\sum a_n z^n)_{n \geq 0}$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$.

(a) Le *rayon de convergence* de $(\sum a_n z^n)_{n \geq 0}$ est l'unique $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

$$a_n z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{quand } |z| < R \quad \text{et} \quad a_n z^n \not\rightarrow 0 \quad \text{quand } |z| > R.$$

Il vérifie la « formule d'Hadamard » suivante : $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Lorsque $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$ et $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \leq +\infty$, on a donc : $\frac{1}{R} = \ell$.

(b) Quand $R > 0$, on note $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ et $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ si $z \in \Omega$.

L'application f est holomorphe et, avec convergence : $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$ pour $z \in \Omega$.

Il en résulte que f est indéfiniment holomorphe, puis : $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ pour tout $n \geq 0$.

Proposition

Soient $(\sum a_n z^n)_{n \geq 0}$ et $(\sum b_n z^n)_{n \geq 0}$ des séries entières qui convergent quand $|z| < r$ ($r > 0$).

La « série entière produit » $(\sum_{p+q=n} a_p b_q) z^n$ converge quand $|z| < r$, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{p+q=n} a_p b_q) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Définition

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et f une application de Ω dans \mathbb{C} .

On dit que f est *analytique* si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $r_{z_0} > 0$ et $(a_{n,z_0})_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $B(z_0, r_{z_0}) \subseteq \Omega$, $(\sum a_{n,z_0} (z - z_0)^n)_{n \geq 0}$ converge et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,z_0} (z - z_0)^n$ quand $z \in B(z_0, r_{z_0})$.

Proposition

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et f une application de Ω dans \mathbb{C} .

L'application f est holomorphe si et seulement si elle est analytique.^(**)

(*) Lorsque $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq 0$, la règle de Cauchy implique la règle de D'Alembert car on a :

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leq +\infty.$$

(**) On suppose que f est holomorphe et que $z_0 \in \Omega$. La « formule intégrale de Cauchy » montrera plus tard que le rayon de convergence R de la série de Taylor $(\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n)_{n \geq 0}$ de f en z_0 vérifie : $\boxed{R \geq d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)}$.