Intégrales le long d'un arc paramétré : à retenir (J-Y D)

Définition $\longleftarrow$ [Paragraphes 1.2 et 5.2 du livre « Applications de l'analyse à la géométrie » de E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux / Chapitres 8 et 9 du livre « Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces » de M. Berger et B. Gostiaux]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

(a) On appelle *arc (paramétré par un segment) de classe C^1 dans* Ω une application $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ qui est de classe C^1.

Son *origine* est $\gamma(a)$ et son *extrémité* est $\gamma(b)$. On dira que γ *joint* $\gamma(a)$ *à* $\gamma(b)$.

(b) On appelle *arc de classe C^1 par morceaux dans* Ω une application $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ pour laquelle il existe un entier $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et des réels $a_0 = a < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = b$ tels que pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$ la restriction de γ à $[a_{i-1}, a_i]$ est de classe C^1.

Son *origine* est $\gamma(a)$ et son *extrémité* est $\gamma(b)$.

(c) On appelle *lacet de classe C^1 dans* Ω (resp. *lacet de classe C^1 par morceaux dans* Ω) un arc de classe C^1 (resp. de classe C^1 par morceaux) de même origine et extrémité.

Définition (« intégration d'une fonction continue le long d'un arc de classe C^1 »)

Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un arc C^1 par morceaux dans $\mathbb{C}$.

(a) La *longueur de* γ est le nombre suivant : $l(\gamma) := \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

(b) Lorsque $f\colon \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ est continue, on note :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{donc} \quad \left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)| \cdot l(\gamma).$$

Dans la pratique, on se contentera de dessiner les arcs le long desquels on intègrera en indiquant un « sens de parcours », car les arcs qu'on utilisera pourront se découper en arcs γ avec : γ de classe C^1 injectif et « muni d'un sens d'orientation » (l'image d'un tel γ s'appelle « une sous-variété orientée à bord de classe C^1 de $\mathbb{C}$ »). Le résultat qui suit explique pourquoi.

Proposition (hors programme)

Soient $\gamma_1\colon [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2\colon [a_2,b_2] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 avec $\gamma_1(a_1)=\gamma_2(a_2)$ et $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(b_2)$.

(a) Si $\gamma_1([a_1,b_1]) = \gamma_2([a_2,b_2])$ avec γ_1 et γ_2 injectifs de dérivées qui ne s'annulent pas, alors $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ pour une $\varphi\colon [a_2,b_2] \to [a_1,b_1]$ bijective croissante avec φ et φ^{-1} de classe C^1.

(b) Si $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ pour une $\varphi\colon [a_2,b_2] \to [a_1,b_1]$ bijective <u>croissante</u> telle que φ et φ^{-1} sont de classe C^1, alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ pour toute application continue $f\colon \gamma_1([a_1,b_1]) \to \mathbb{C}$.

Exemples

Si $u, v \in \mathbb{C}$: $[u,v]^+\colon \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (1-t)u+tv \end{array}$ est un arc (orienté) de classe C^1 dans $\mathbb{C}$.

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$: $\mathscr{C}(z_0,r)^+\colon \begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \end{array}$ est un lacet (orienté) de classe C^1 dans $\mathbb{C}$.

Proposition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ qui s'écrit $f = F'$ avec $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.

On a : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ pour tout arc C^1 par morceaux $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ dans Ω.

Proposition

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f une application holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.

Il existe une application holomorphe $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$ (« primitive holomorphe de f ») si et seulement si $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout lacet C^1 par morceaux γ dans Ω.

Dans ce cas, les primitives holomorphes de f dans Ω sont les applications

$$z \longmapsto \int_{\gamma_{z_0,z}} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \ + \ k \quad \text{avec } k \in \mathbb{C}$$

où l'intégrale ne dépend pas du choix de l'arc C^1 par morceaux $\gamma_{z_0,z}$ joignant z_0 à z dans Ω.

Définition-Proposition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.

(a) On dit que Ω *est étoilé par rapport à* z_0 si on a : $[z_0, z] \subseteq \Omega$ pour tout $z \in \Omega$.

(b) Quand l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est étoilé par rapport à z_0, il est connexe et toute application holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}$ a une primitive holomorphe.

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

(a) On appelle *lacet dans* Ω une application continue $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \Omega$ telle que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

(b) On dit que deux lacets $\gamma_0, \gamma_1\colon [t_0, t_1] \to \Omega$ dans Ω, définis sur un même segment, sont *homotopes (comme lacets)* si :

il existe $\begin{array}{rcl} c\colon [0,1] \times [t_0, t_1] & \to & \Omega \\ (s,t) & \mapsto & c_s(t) \end{array}$ continue telle que $\begin{cases} \forall s \in [0,1] \quad c_s(t_0) = c_s(t_1) \\ c_0 = \gamma_0 \ \text{ et } \ c_1 = \gamma_1 \end{cases}$.

(c) On dit que Ω *est simplement connexe* si :

Ω est connexe et tout lacet dans Ω est homotope à un lacet constant.$^{(\star)}$

Définition-Proposition

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un lacet de classe C^1 par morceaux dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

(a) On note : $\quad \operatorname{Ind}(\gamma, z_0) := \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \in \mathbb{Z} \quad$ « indice de γ par rapport à z_0 ».

(b) L'application $\operatorname{Ind}(\gamma, \cdot\,)$ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$.
Ainsi : $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = 0$ si z_0 est dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$.

(c) On a $\operatorname{Ind}(\delta, z_0) = \operatorname{Ind}(\gamma, z_0)$ pour tout lacet de classe C^1 par morceaux δ dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ qui est homotope à γ dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Proposition

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, Δ^+ une demi-droite affine réelle fermée issue de z_0 dirigée par $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ un lacet C^1 par morceaux dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tel que $\gamma^{-1}(\Delta^+)$ est fini et formé de points t_1, ..., t_n en lesquels γ a une dérivée qui n'est pas dans $\mathbb{R}\,v$, avec $a < t_1 < \ldots < t_n < b$.

On a : $\quad \operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = p - q \quad$ où p est le nombre de $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $\operatorname{Im} \frac{\gamma'(t_k)}{v} > 0$ (« arc γ parcouru dans le sens direct au niveau de t_k ») et q est le nombre de $k \in \{1, ..., n\}$ tels que $\operatorname{Im} \frac{\gamma'(t_k)}{v} < 0$ (« arc γ parcouru dans le sens indirect au niveau de t_k »).

$(\star)$ On peut démontrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Ω est simplement connexe ;

(ii) Ω est connexe et toute application holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}$ a une primitive holomorphe

(iii) Ω est connexe et le complémentaire de Ω dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est connexe.