

II. PRIMITIVES DE FONCTIONS HOLOMORPHES, INDICE

Intégrale le long d'un arc paramétré

Exercice 1.

(a) On se donne $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

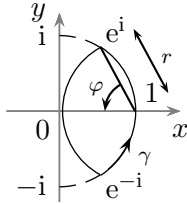
Calculer $\int_{\Gamma} x dz$ où l'arc $\Gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ décrit n fois le cercle $\mathcal{C}(0, \varepsilon)$ dans le sens direct.

(b) Trouver une suite $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1$, de lacets de classe C^1 , qui converge uniformément vers un lacet $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , avec $\int_{\gamma_n} x dz \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} x dz$.

Exercice 2. On sait que Log_P est la primitive homomorphe de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ nulle en 1.

Retrouver la valeur de $\text{Log}_P(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, en joignant 1 à z_0 par l'arc de classe C^1 par morceaux obtenu en parcourant un segment de 1 à $|z_0|$ et un arc de cercle centré en 0 de $|z_0|$ à z_0 .

Exercice 3. On pose $f(z) := 1 + z + \dots + z^{n-1}$ pour $z \in \mathbb{C}$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé.



(a) En intégrant f (qui a une primitive) le long de γ , montrer que :

$$\sin 1 + \dots + \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2} \int_{\pi-\varphi}^{\pi+\varphi} (1 - (1 + re^{it})^n) dt.$$

(b) En déduire que : $\sin 1 + \dots + \frac{\sin n}{n} > 0$.

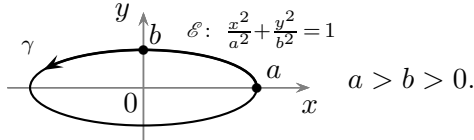
Indice d'un lacet par rapport à un point

Exercice 4. Soient $\gamma, \delta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ deux lacets de classe C^1 par morceaux dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) Démontrer que : $\text{Ind}(\gamma\delta, 0) = \text{Ind}(\gamma, 0) + \text{Ind}(\delta, 0)$, où $(\gamma\delta)(t) := \gamma(t)\delta(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

(b) On suppose que « δ est proche de γ » au sens où : $|\delta(t) - \gamma(t)| < |\gamma(t)|$ pour tout $t \in [0, 1]$. Démontrer que $\text{Ind}(\delta, 0) = \text{Ind}(\gamma, 0)$. *Indication* : utiliser l'égalité $\delta = \gamma \frac{\delta}{\gamma}$.

Exercice 5.



(a) Montrer que $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\mathcal{C}(0,b)^+} \frac{dz}{z}$ (découpage).

(b) En déduire que : $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$.

Exercice 6. « Formule du calcul géométrique de l'indice d'un lacet par rapport à un point »

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, Δ^+ une demi-droite affine réelle fermée issue de z_0 dirigée par $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ un lacet C^1 par morceaux dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tel que $\gamma^{-1}(\Delta^+)$ est fini et formé de points t_1, \dots, t_n en lesquels γ a une dérivée qui n'est pas dans $\mathbb{R}v$, avec $a < t_1 < \dots < t_n < b$.

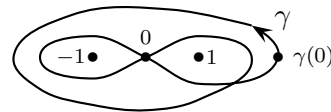
(a) On se donne (existe) une détermination continue L du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Démontrer que $\text{Ind}(\gamma, z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^n \frac{F(\gamma(t_k - \varepsilon)) - F(\gamma(t_k + \varepsilon))}{2i\pi}$ où $F(z) := L(\frac{z-z_0}{v})$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta^+$.

(b) En déduire que : $\text{Ind}(\gamma, z_0) = p - q$ où p est le nombre de $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\text{Im} \frac{\gamma'(t_k)}{v} > 0$ (« arc γ parcouru dans le sens direct au niveau de t_k ») et q est le nombre de $k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\text{Im} \frac{\gamma'(t_k)}{v} < 0$ (« arc γ parcouru dans le sens indirect au niveau de t_k »).

Exercice 7.

On s'intéresse au lacet $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 tel que $\gamma(0) = 2,5$ représenté par le dessin suivant :



(a) Calculer $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ quand $f(z) := z^2 - 1$.

(b) En déduire qu'il existe un unique lacet $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de classe C^1 tel que :

$$\tilde{\gamma}(0) \in [1, +\infty[\quad \text{et} \quad \gamma(t) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} \left(\tilde{\gamma}(t) + \frac{1}{\tilde{\gamma}(t)} \right) \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Indication : remarquer que, d'une part l'égalité (*) équivaut à $(\tilde{\gamma}(t) - \gamma(t))^2 = f(\gamma(t))$,

et d'autre part l'application $\lambda: t \mapsto \int_{\gamma|_{[0,t]}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ vérifie $\frac{d}{dt} ((f \circ \gamma)(t) \exp(-\lambda(t))) = 0$.

Existence d'une primitive holomorphe dans un ouvert étoilé

Exercice 8. On considère $0 \leq r < R$ et une application holomorphe $f: \mathbb{C} \setminus [-r, r] \rightarrow \mathbb{C}$.

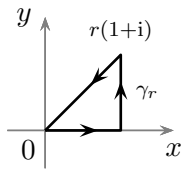
(a) Prouver que pour toute demi-droite affine fermée Δ^+ de \mathbb{C} , l'ouvert $U := \mathbb{C} \setminus \Delta^+$ de \mathbb{C} est étoilé.

(b) Montrer que f a une primitive holomorphe si et seulement si $\int_{\mathcal{C}(0,R)^+} f(z) dz = 0$.

Indication : noter $U^+ := \mathbb{C} \setminus]-\infty, r]$ et $U^- := \mathbb{C} \setminus [-r, +\infty[$, puis introduire des primitives holomorphes F^+ de $f|_{U^+}$ et F^- de $f|_{U^-}$.

(c) Existe-t-il une primitive holomorphe de $z \mapsto \frac{1}{z^2-1}$ sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$?

Exercice 9.



(a) Quelle égalité obtient-on en calculant $\int_{\gamma_r} e^{-z^2} dz$?

(b) Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du$.

Indication : remarquer qu'on a $|e^{-(r+iy)^2}| \leq e^{-r^2} e^{ry}$ lorsque $0 \leq y \leq r$.

Utilisation de l'indice

Exercice 10. On admet dans cet exercice que la dérivée d'une fonction holomorphe est holomorphe.

Soient $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, $z_0 \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que f ne s'annule pas. On choisit $u_0, v_0 \in \mathbb{C}$ tels que $f(z_0) = e^{u_0} = v_0^n$.

(a) Démontrer qu'il existe une application holomorphe $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $f = e^\lambda$ et $\lambda(z_0) = u_0$

si et seulement si $\int_\gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = 0$ pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux dans Ω ;

et dans ce cas on a $\lambda(z) = u_0 + \int_{\gamma_{z_0,z}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi$ pour $z \in \Omega$, où $\gamma_{z_0,z}$ est un arc C^1 par morceaux dans Ω joignant z_0 à z .

(b) Démontrer qu'il existe une application holomorphe $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $f = \rho^n$ et $\rho(z_0) = v_0$

si et seulement si $\int_\gamma \frac{1}{n} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux dans Ω ;

et dans ce cas on a $\rho(z) = v_0 \exp\left(\int_{\gamma_{z_0,z}} \frac{1}{n} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi\right)$ pour $z \in \Omega$, où $\gamma_{z_0,z}$ est un arc C^1 par morceaux dans Ω joignant z_0 à z .

Indication : remarquer que lorsque ρ convient, on a $\int_\gamma \frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)} d\xi = \int_{\rho \circ \gamma} \frac{dv}{v}$.

Exercice 11. Soient $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus [-1, +\infty[$ et $\Omega_2 := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

$$z \mapsto z^4 - z^2$$

(a) Prouver que, pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux dans $\mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on a :

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi (2 \text{Ind}(\gamma, 0) + \text{Ind}(\gamma, -1) + \text{Ind}(\gamma, 1)).$$

(b) Construire, quand cela est possible, $\lambda_1, \rho_1: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}$ et $\lambda_2, \rho_2: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes vérifiant :

$$\forall z \in \Omega_1 \quad f(z) = e^{\lambda_1(z)} = \rho_1^2(z) \quad \text{et} \quad \forall z \in \Omega_2 \quad f(z) = e^{\lambda_2(z)} = \rho_2^2(z).$$

Exercice 12.

(a) Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} , $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ distincts, et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}$.

On pose : $f(z) := (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_r)^{m_r}$ pour $z \in \Omega$.

Démontrer qu'il existe $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f = e^\lambda$ (« détermination du logarithme de f ») si et seulement si on a $\sum_{k=1}^r m_k \text{Ind}(\gamma, z_k) = 0$ pour tout lacet γ dans Ω .

(b) Existe-t-il une détermination du logarithme de $g: z \in \mathbb{C} \setminus A \mapsto 1 - 1/z$ avec :

(i) $A = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$? (ii) $A =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$? (iii) $A = [0, 1]$?