

Formule de Cauchy et séries de Laurent : à retenir (J-Y D)

Définition

On appelle *fonction entière* sur \mathbb{C} une fonction holomorphe de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

Proposition

Soient $f: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{C}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $\overline{B(z_0, r)}$ une boule fermée incluse dans Ω .

(a) Pour tout $z \in B(z_0, r)$, on a : $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)^+} \frac{f(u)}{u-z} du$ « formule de Cauchy ».

(b) Quand $z = z_0$, cela s'écrit : $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$ « formule de la moyenne ».

Corollaire 1

Soient $f: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{C}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $\overline{B(z_0, r)}$ une boule fermée incluse dans Ω .

(a) Il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{C} telle que :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{pour tout } z \in B(z_0, r) \quad \text{« holomorphe = analytique ».}$$

Le rayon de convergence R de la série de Taylor $(\sum a_n (z - z_0)^n)_{n \geq 0}$ de f en z_0 vérifie donc :

$$\boxed{R \geq d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)}. \quad \leftarrow [\text{ici } d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}]$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a avec les notations du (a) :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du \quad \leftarrow [\text{« résidu » en } z_0 \text{ de } z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}]$$

donc $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ en notant $M(r) := \sup_{|z - z_0| = r} |f(z)|$ « inégalités de Cauchy ».

(c) Toute fonction entière et bornée sur \mathbb{C} est constante « théorème de Liouville ».

Corollaire 2

Soient $f: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{C}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $z_0 \in \Omega$.

On suppose que pour tout voisinage V de z_0 on a $f|_V \neq 0$.^(*)

(a) On appelle *ordre de multiplicité de z_0 pour f* l'unique $m \in \mathbb{N}$ tel que :
il existe $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant $g(z_0) \neq 0$ et $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ pour $z \in \Omega$.

(b) L'ordre de multiplicité m de z_0 pour f est caractérisé par :

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Proposition (« principe des zéros isolés »)

Soient $f: \underset{\text{ouvert connexe de } \mathbb{C}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non-nulle et $z_0 \in \Omega$ un zéro de f .

Il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subseteq \Omega$ et $B(z_0, r)$ ne contient pas d'autre zéro de f .

Corollaire (« principe du prolongement analytique »)

Deux applications holomorphes sur un ouvert connexe Ω de \mathbb{C} qui coïncident au voisinage d'un point z_0 de Ω sont égales.

Proposition

Soit $f: \underset{\text{ouvert connexe de } \mathbb{C}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non-constante.

(a) L'image par f d'un ouvert de Ω est un ouvert de \mathbb{C} « théorème de l'application ouverte ».

(b) On en déduit que $|f|$ n'a pas de maximum local dans Ω « principe du maximum ».

(*) Le principe des zéros isolés montre que cela a lieu quand : Ω est connexe et f est non-nulle.

Proposition

Pour toute famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de \mathbb{C} , l'application $u: n \in \mathbb{Z} \mapsto u_n \in \mathbb{C}$ est intégrable pour la mesure de comptage μ si et seulement si les séries $(\sum u_{-n})_{n \geq 1}$ et $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ sont absolument convergentes. Dans ce cas, le nombre $\int_{\mathbb{Z}} u(n) d\mu(n)$ est égal au nombre suivant :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n := \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , f une fonction holomorphe sur Ω , et $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ une « couronne ouverte » incluse dans Ω avec $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$.

(a) Il existe une unique famille $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de \mathbb{C} telle que :

$$\forall z \in \mathcal{C} \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \text{« développement en série de Laurent de } f \text{ en } z_0 \text{ ».}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a avec les notations du (a) lorsque $r_1 < r < r_2$:

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)^+} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du.$$

Définition-Proposition

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ et $f: \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe.

On note $(\sum a_n (z - z_0)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ le développement en série de Laurent de f en z_0 , associé à n'importe quelle boule ouverte épointée $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$ et $B(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$.

(a) On dit que z_0 est une *fausse singularité* de f si : $\{n > 0 \mid a_{-n} \neq 0\}$ est vide.

Cela équivaut à chacune des trois conditions suivantes :

- (i) il existe un voisinage V de z_0 dans Ω tel que $f(V \setminus \{z_0\})$ est bornée ; \leftarrow [formule intégrale pour a_n]
- (ii) il existe $\tilde{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = \tilde{f}(z)$ pour tout $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$;
- (iii) $|f(z)|$ a une limite finie quand $z \rightarrow z_0$ avec $z \neq z_0$.

(b) On dit que z_0 est un *pôle* de f de *multiplicité* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si : $k = \max\{n > 0 \mid a_{-n} \neq 0\}$.

Cela équivaut à chacune des deux conditions suivantes :

- (i) il existe $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $g(z_0) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$ pour tout $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$;
- (ii) $|(z - z_0)^k f(z)|$ a une limite finie non nulle quand $z \rightarrow z_0$ avec $z \neq z_0$.

(c) On dit que z_0 est un *point singulier essentiel* de f si : $\{n > 0 \mid a_{-n} \neq 0\}$ est infini.

Cela équivaut à chacune des deux conditions suivantes :

- (i) pour tout voisinage V de z_0 dans Ω , l'ensemble $f(V \setminus \{z_0\})$ est dense dans \mathbb{C} ^(*) ;
- (ii) $|f(z)|$ n'a pas de limite dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ quand $z \rightarrow z_0$ avec $z \neq z_0$.

Définition-Proposition

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

(a) Une *fonction méromorphe* sur Ω est une application holomorphe sur un ouvert de \mathbb{C} de la forme $\Omega \setminus P$ où P est un fermé discret de Ω formé de pôles de f .

(La condition « P est un fermé de Ω » signifie que $\Omega \setminus P$ est un ouvert de \mathbb{C} , ce qui donne un sens à « holomorphe sur $\Omega \setminus P$ ».)
 (La condition « P est une partie discrète de Ω » signifie que pour tout $z_0 \in P$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subseteq \Omega \setminus P$.)

(b) Soit Ω un ouvert connexe non vide de \mathbb{C} . L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω est un corps, en prolongeant par continuité (en particulier, il est stable par quotient).

Théorème (« théorème de Weierstrass »)

\leftarrow [voir le livre *Analyse réelle et complexe* de Rudin]

On considère un ouvert connexe Ω de \mathbb{C} .

Les fonctions méromorphes sur Ω sont les $\frac{g}{h}$ avec $g, h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et $h \neq 0$.

(*) Plus précisément, le « théorème de Picard » montre que $f(V \setminus \{z_0\})$ est égal à \mathbb{C} ou à \mathbb{C} privé d'un point.