

III. FORMULE DE CAUCHY ET ZÉROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Formule de Cauchy

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $A = \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + 2e^{i\theta}\right) d\theta$ (formule de la moyenne) ;

(b) $B = \int_0^{2\pi} \ln |2e^{3i\theta} - e^{i\theta} + 5| d\theta$ (formule de la moyenne) ;

(c) $C = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2}$ avec $0 < \alpha < 1$ (introduire $f: z \mapsto \frac{1}{z - \frac{1}{\alpha}}$).

Exercice 2.

- (a) Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor d'une fonction rationnelle F , en un point z_0 de \mathbb{C} qui n'est pas pôle de F , est : $R := \inf_{\rho \text{ pôle de } F} |z_0 - \rho|$ (deux méthodes).
(b) Calculer le rayon de convergence de la série de Taylor de la fonction tangente au point i .

Exercice 3.

- (a) Prouver qu'il existe une unique fonction holomorphe Arcsin_P sur $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$ vérifiant : $\text{Arcsin}_P(0) = 0$ et $\text{Arcsin}'_P(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}_P}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$.
(b) Calculer le rayon de convergence de la série de Taylor de Arcsin_P en $2 + i$.

Inégalités de Cauchy

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière.

On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{(|z|^2+1)^N}$ est bornée.

Démontrer que f est polynomiale.

Théorème de Liouville

Exercice 5. Soit f une fonction entière. On suppose que $f(\mathbb{C})$ n'est pas dense dans \mathbb{C} .

- (a) Démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
(b) Démontrer que f est constante. *Indication* : on pourra poser $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$.

Principe du maximum

Exercice 6. Soit $f: \overline{B(0,1)} \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue telle que $f|_{B(0,1)}$ est holomorphe.

Démontrer que : $\sup_{z \in \overline{B(0,1)}} |f(z)| = \sup_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |f(z)|$.

Exercice 7. Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, et $a \in \Omega$.

On suppose que $|f|$ a un minimum local en a avec $f(a) \neq 0$.

Démontrer que f est constante « principe du module minimum non nul ».

Exercice 8. Soit $f: \overline{B(0,1)} \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue telle que $f|_{B(0,1)}$ est holomorphe.

On suppose que : $f(0) = 2$ et $|f(z)| > 3$ quand $|z| = 1$.

Démontrer que f a un zéro dans $B(0,1)$.

Exercice 9. Soient Ω un ouvert connexe borné non vide de \mathbb{C} et $A, B \in \mathbb{C}$.

Montrer que l'application $g: M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\| \|\overrightarrow{BM}\|$ atteint son maximum sur $\overline{\Omega}$ en un point de la frontière $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ de Ω dans \mathbb{C} .

Principe des zéros isolés

Exercice 10. Dans chaque cas, existe-t-il $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe vérifiant la condition imposée ?

- (a) $f(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f(2) = 0$, avec $\Omega = \mathbb{C}$;
- (b) $f(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f(2) = 0$, avec $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- (c) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, avec $\Omega = \mathbb{C}$;
- (d) $f(\frac{1}{n}) = \frac{n+1}{n^2+4}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, avec $\Omega = B(0, \frac{1}{2})$.

Exercice 11. Soient f et g deux fonctions analytiques définies sur un ouvert *connexe* Ω de \mathbb{C} (*respectivement* sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R}).

On suppose que $fg = 0$. Démontrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 12. Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ et $f(i\mathbb{R}) \subseteq i\mathbb{R}$.

Démontrer que f est impaire.

Indication : vérifier que $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ et $\overline{f(\bar{z})} = -f(-z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Principe du prolongement analytique

Exercice 13. Soit $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$, $a < b$, une application analytique de la variable réelle.

Autrement dit f est C^∞ , et pour tout $c \in]a, b[$ il existe $r_c > 0$ tel que $]c - r_c, c + r_c[\subseteq]a, b[$ et :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \quad (\text{avec convergence}) \quad \text{pour tout } x \in]c - r_c, c + r_c[.$$

Construire un prolongement analytique \tilde{f} de f à l'ouvert $\Omega := \bigcup_{a < c < b} B(c, r_c)$ de \mathbb{C} .

Indication : on souhaite avoir $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z - c)^n$ quand $z \in B(c, r_c)$.

Multiplicité d'un zéro

Exercice 14. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

Soient $a \in U$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tels que : $f(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$ et $f^{(m)}(a) \neq 0$.

- (a) Démontrer qu'il existe une fonction holomorphe $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in U$, on ait $f(z) = (z - a)^m h(z)$.
- (b) Construire un ouvert $V \subseteq U$ contenant a et une fonction holomorphe $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ tels que, d'une part on ait $f(z) = g(z)^m$ pour $z \in V$, et d'autre part $g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.
- (c) Démontrer qu'il existe un ouvert $V_1 \subseteq V$ contenant a tel que $f(V_1)$ est un ouvert de \mathbb{C} .

Exercice 15.

- (a) Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et h une application holomorphe non constante de Ω dans \mathbb{C} . Démontrer que l'image par h d'un ouvert de Ω est un ouvert de \mathbb{C} .
- (b) Vérifier que l'image par $\text{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ d'un ouvert de \mathbb{C} est un ouvert de \mathbb{R} .
- (c) Soit $f: \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue telle que $f|_{B(0, 1)}$ est holomorphe. On suppose que : $f(z) \in \mathbb{R}$ quand $|z| = 1$. Démontrer que f est constante.

Indication : remarquer que l'image de $\overline{B(0, 1)}$ par $g: z \mapsto \text{Im}(f(z))$ est un segment.

Exercice 16. Soient Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non nulle.

- (a) Montrer que f a dans chaque compact K de Ω un nombre fini de zéros.
- (b) Soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{B(z_0, r)} \subseteq \Omega$. On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathcal{C}(z_0, r)$. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les zéros de f dans $B(z_0, r)$, et m_1, \dots, m_n leur multiplicité.

Démontrer que :
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m_1 + \dots + m_n.$$