Calculs de résidus : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe.

(a) Le *résidu de f en z_0*, noté $\operatorname{Res}(f, z_0)$, est le coefficient a_{-1} dans le développement en série de Laurent $\left(\sum a_n\,(z-z_0)^n\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ de f en z_0. Ainsi, lorsque $\overline{B(z_0,r)} \subseteq \Omega$ on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}(z_0,r)^+} f(u)\,\mathrm{d}u. \qquad \longleftarrow \text{[le « résidu » dans l'intégrale vient du terme sans primitive]}$$

(b) Quand z_0 est un pôle d'ordre k de f, on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \tfrac{1}{(k-1)!}\tfrac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}\big((z-z_0)^k f(z)\big)\Big|_{z=z_0} \qquad \text{(formule peu utilisée).}$$

(c) On suppose que $f = \frac{g}{h}$ avec $g, h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$.
Dans ce cas z_0 est un pôle de multiplicité 1 de f, et on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \tfrac{g(z_0)}{h'(z_0)} \qquad \text{(formule très utile).}$$

Remarque

(a) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, et $f\colon B(z_0,r)\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe.
Il serait plus astucieux de noter $\operatorname{Res}(f(z)\,\mathrm{d}z, z_0)$ au lieu de $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

En effet, cette notation permettrait d'écrire, pour $\varphi\colon \underset{\text{ouvert de }\mathbb{C}}{U} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $u_0 \in U$ tels que $\varphi'(u_0) \neq 0$ et $\varphi(u_0) = z_0$ (« changement de coordonnées locales »), l'égalité suivante :

$$\operatorname{Res}(f(\varphi(u))\,\mathrm{d}\varphi(u), u_0) \;=\; \operatorname{Res}(f(z)\,\mathrm{d}z, z_0).$$

(b) Soient $r > 0$ et $f\colon \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe.

On définit : $\operatorname{Res}(f(z)\,\mathrm{d}z, \infty) := \operatorname{Res}\left(f(\tfrac{1}{u})\,\mathrm{d}(\tfrac{1}{u}), 0\right)$. Ainsi, lorsque $r > R$ on a :

$$\operatorname{Res}(f(z)\,\mathrm{d}z, \infty) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}(0,\frac{1}{r})^+} f(\tfrac{1}{u})\,\mathrm{d}(\tfrac{1}{u}) = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathscr{C}(0,r)^+} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Lemme (à démontrer à chaque fois qu'on l'utilise)

(a) Si $f\colon \left\{|z| > R \text{ et } \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et $z f(z) \underset{\substack{|z|\to+\infty\\ \theta_1\leq\arg z\leq\theta_2}}{\longrightarrow} 0$

$$\text{alors} \qquad \int_{\substack{|z|=r \text{ sens direct}\\ \theta_1\leq\arg z\leq\theta_2}} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Si $f\colon \left\{|z| > R \text{ et } 0 \leq \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2 \leq \pi\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et $f(z) \underset{\substack{|z|\to+\infty\\ \theta_1\leq\arg z\leq\theta_2}}{\longrightarrow} 0$

$$\text{alors} \qquad \int_{\substack{|z|=r \text{ sens direct}\\ \theta_1\leq\arg z\leq\theta_2}} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \longleftarrow \left[\text{on a } -\sin\theta \leq -\tfrac{2\theta}{\pi} \text{ quand } 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2} \text{ car } \sin\big|_{[0,\frac{\pi}{2}]} \text{ concave}\right]$$

(c) Si $f\colon \left\{0 < |z| < R \text{ et } \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et $z f(z) \underset{\substack{|z|\to 0\\ \theta_1\leq\arg z\leq\theta_2}}{\longrightarrow} 0$

$$\text{alors} \qquad \int_{\substack{|z|=\varepsilon \text{ sens direct}\\ \theta_1\leq\arg z\leq\theta_2}} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

(d) Si $f\colon \left\{0 < |z| < R\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et 0 est pôle simple de f

$$\text{alors} \qquad \int_{\substack{|z|=\varepsilon \text{ sens direct}\\ \theta_1\leq\arg z\leq\theta_2}} f(z)\,\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)\operatorname{Res}(f,0).$$

Théorème (« théorème des résidus »)

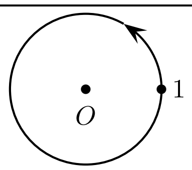
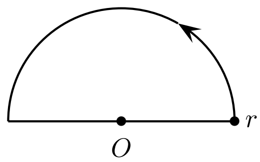
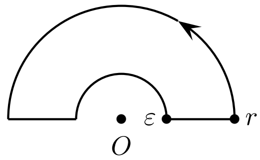
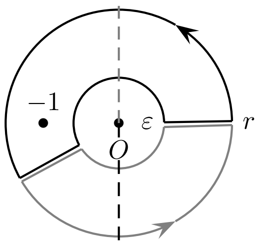
On considère :

– un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et une fonction f holomorphe sur $\Omega \setminus S$ où S est un fermé discret de Ω (*) (par exemple une fonction f méromorphe sur Ω avec S égal à l'ensemble de ses pôles) ;

– un lacet γ de classe C^1 par morceaux dans $\Omega \setminus S$, tel que l'indice de γ par rapport à tout point de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est égal à 0 (ce qui se produit lorsque Ω est étoilé).

On a : $\boxed{\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{z_0 \in S} \underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma, z_0)\ \mathrm{Res}(f, z_0)}_{\text{nombre fini de termes non nuls}}}$. $\longleftarrow$ [voir le livre *Analyse réelle et complexe* de Rudin]

<u>Choix des lacets pour les calculs d'intégrales par la formule des résidus</u> (R rationnelle)

Intégrale	Hypothèse sur R	$f(z)$	γ
$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$	$R(\cos\theta, \sin\theta)$ définis	$\frac{1}{\mathrm{i}z}\, R\big(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z})\big)$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$	R sans pôle réel $\deg R \leq -2$	$R(z)$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ (converge en $\pm\infty$ par IPP)	R sans pôle réel $\deg R \leq -1$	$R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$	
$\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} R(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ $+ \int_{\varepsilon}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x \Big)$ (converge en $\pm\infty$ par IPP)	R sans pôle dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0 pôle simple de R $\deg R \leq -1$	$R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$	
$\int_0^{+\infty} R(x)\,x^\alpha\,\mathrm{d}x$ (resp. $\int_0^{+\infty} R(x)\,x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$) avec $0 < \alpha < 1$	R sans pôle dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ 0 non-pôle multiple de R $\deg R \leq -2$	$R(z)\,\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}$ (resp. $R(z)\,\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}\,\mathrm{Log}\,z$)	$f_+(z)$ avec Log_+ sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}^-$ et $f_-(z)$ avec Log_- sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{i}\mathbb{R}^+$ où $\mathrm{Log}_+(-1) = \mathrm{Log}_-(-1) = \mathrm{i}\pi$
$\int_0^{+\infty} R(x) \ln x\,\mathrm{d}x$ [ou IPP si R a une primitive évidente]	R sans pôle dans $\mathbb{R}^+$ $\deg R \leq -2$	$R(z)\,\mathrm{Log}\,z\,(\mathrm{Log}\,z - 2\mathrm{i}\pi)$ [ou $R(z)(\mathrm{Log}\,z)^2$ si R est réelle]	

Quand R est rationnelle sans pôle dans $\mathbb{R}^+$ avec $\deg R \leq -2$ et $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $n = 0$), on calcule $\int_0^{+\infty} R(x)\,(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$ en intégrant $R(z)\,P_0(\mathrm{Log}\,z)$ le long des deux lacets proposés dans le cas $n = 1$, où $P_0 \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$ vérifie $P_0(X) - P_0(X + 2\mathrm{i}\pi) = X^n$.

$(*)$ La condition « S est un fermé discret de Ω » signifie que $\Omega \setminus S$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (ce qui donne un sens à « f est holomorphe sur $\Omega \setminus S$ ») et pour tout $z_0 \in S$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subseteq \Omega \setminus S$.