

## IV. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LAURENT, CALCULS DE RÉSIDUS

### Séries de Laurent

**Exercice 1.** Développer en séries de Laurent les applications suivantes :

- (a)  $a(z) := z e^{\frac{1}{z-1}}$  dans  $A := \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ;
- (b)  $b(z) := \frac{1}{z(z-1)}$  dans  $B_1 := \{|z-2| < 1\}$ ,  $B_2 := \{1 < |z-2| < 2\}$ ,  $B_3 := \{|z-2| > 2\}$ ;
- (c)  $c(z) := \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$  dans  $C := \{2 < |z| < 3\}$ .

### Singularités

**Exercice 2.** Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses points singuliers isolés, ses pôles avec ordre de multiplicité, ses points singuliers essentiels, puis indiquer si elle est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  :

- (a)  $a(z) := \frac{z}{e^z-1}$ ;
- (b)  $b(z) := \frac{1}{z^2-1} \cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$ ;
- (c)  $c(z) := \frac{\sin(\pi z)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ .

**Exercice 3.** On pose  $f(z) := \sin\left(\frac{1}{z}\right)$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

- (a) Quel est le type de la singularité 0 de  $f$ ?
- (b) Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Démontrer qu'il existe  $(z_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  tel que  $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et  $f(z_n) = a$  pour  $n \geq 0$ .

**Exercice 4.** Soient  $r \geq 0$  et  $f: \{|z| > r\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe bornée.

Démontrer que  $f(z)$  a une limite dans  $\mathbb{C}$  quand  $z \rightarrow \infty$  (au sens où  $|z| \rightarrow +\infty$ ) et que  $f'(z) \xrightarrow[z \rightarrow \infty]{} 0$ .

*Indication :* poser  $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$  quand  $0 < |z| < \frac{1}{r}$ .

### Calculs de résidus

**Exercice 5.** Calculer les résidus suivants :

- (a)  $A := \text{Res}\left(\frac{1}{z^5-1}, e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)$ ;
- (b)  $B := \text{Res}\left(\frac{z^2}{(z^3-1)^2}, e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$  en reconnaissant une dérivée;
- (c)  $C := \text{Res}\left(\frac{e^{\pi z}}{(z-z^9)\sin z}, i\right)$ ;
- (d)  $D := \text{Res}\left(z^3 e^{\frac{1}{z}}, 0\right)$ ;
- (e)  $E := \text{Res}\left(\frac{\tan z}{z^4}, 0\right)$ ;
- (f)  $F := \text{Res}\left(\frac{\cos(\pi z)}{(z+1)^3}, -1\right)$ ;
- (g)  $G := \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}, -i\right)$ ;
- (h)  $H := \text{Res}\left(\frac{\text{Log}_P z}{(z^2+4)^2}, 2i\right)$ .

## Formule des résidus

**Exercice 6.** Calculer les intégrales suivantes :

- (a)  $A := \int_{\mathcal{C}(0,1)^+} \frac{z^2 + 1}{z(3z - 1)} dz;$   
(b)  $B := \int_{\mathcal{C}(0,1)^+} \frac{z}{z^2 + 4z + 1} dz;$   
(c)  $C := \int_{\mathcal{C}(0,1)^+} \frac{f(z)}{2z - 1} dz$  où  $f: \underset{\text{ouvert de } \mathbb{C}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et  $\overline{B(0,1)} \subset \Omega$ .

## Calculs d'intégrales par la méthode des résidus

**Exercice 7.** Calculer, après avoir vérifié leur convergence, les intégrales suivantes :

- (a)  $A := \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta + 2};$   
(b)  $B := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$  où  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\};$   
(c)  $C := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx;$   
(d)  $D := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1} dx;$   
(e)  $E := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 10} dx;$   
(f)  $F := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx;$   
(g)  $G := \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x + 2)^3} dx;$   
(h)  $H := \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x - 1)} dx;$   
(i)  $I := \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx.$

**Exercice 8.** On considère  $R \in \mathbb{C}(X)$  de degré  $\leq 2$  sans pôle dans  $\mathbb{Z}$ .

(a) Appliquer le théorème des résidus aux intégrales curvilignes

$$I_N := \int_{C_N} R(z) \pi \cotan(\pi z) dz \quad \text{et} \quad J_N := \int_{C_N} R(z) \frac{\pi}{\sin(\pi z)} dz$$

où  $N \in \mathbb{N}$  est « assez grand » et  $C_N$  est le lacet  $C^1$  par morceaux obtenu en parcourant dans le sens direct le carré de sommets  $(\pm(N + \frac{1}{2}), \pm i(N + \frac{1}{2}))$ .

(b) En déduire une formule pour :

$$S_+ := \sum_{n=-1}^{-\infty} R(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} R(n) \quad \text{et} \quad S_- := \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^n R(n) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n R(n).$$

(c) Calculer :  $\tilde{S}_+ := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$  et  $\tilde{S}_- := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ .