Surface de Riemann d'un germe de fonction analytique

Définition

(a) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ qui contient z_0. On appelle *germe de f au point z_0* le couple (z_0, f_{z_0}) avec $f_{z_0} := \big(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) On note $\mathscr{G} := \big\{(z_0, (a_n)_{n\in\mathbb{N}})\ ;\ z_0 \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty\big\}$ l'ensemble des germes de fonctions analytiques en des points de $\mathbb{C}$.

(c) On munit $\mathscr{G}$ de la topologie dont les ouverts sont les réunions des $U_f := \{(z, f_z)\ ;\ z \in \Omega\}$ avec $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytique.

C'est une topologie car $U_{f_1} \cap U_{f_2} = U_f$ quand $f_1\colon \Omega_1 \to \mathbb{C}$ et $f_2\colon \Omega_2 \to \mathbb{C}$ sont analytiques, avec $\Omega := \{z \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \mid (f_1)_z = (f_2)_z\}$ et $f(z) := f_1(z) = f_2(z)$ quand $z \in \Omega$.

Proposition

L'application $\pi\colon (z, f_z) \in \mathscr{G} \mapsto z \in \mathbb{C}$ est continue, et pour toute $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analytique elle se restreint en un homéomorphisme de U_f sur Ω.

La topologie de $\mathscr{G}$ est séparée.

Soient (a, f_a) et (b, g_b) des éléments distincts de $\mathscr{G}$ avec $a = b$.
On fixe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon)$ est incluse dans les ouverts de définitions Ω_f et Ω_g de f et g.
Les ouverts $B(a, \varepsilon)_f$ et $B(a, \varepsilon)_g$ de $\mathscr{G}$ séparent (a, f_a) et (b, g_b).

Lemme (« lemme de Poincaré-Volterra »)

Soient X un espace topologique séparé connexe localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), Y un espace topologique séparé à base dénombrable, et $p\colon X \to Y$ une application continue telle que $p^{-1}(y)$ est discret pour $y \in Y$ (c'est le cas lorsque p est un homéomorphisme local).
Alors X est à base dénombrable.

On fixe une base d'ouverts $\mathcal{U}$ de Y qui est dénombrable. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des ouverts à base dénombrable V de X qui sont composante connexe d'un ensemble $p^{-1}(U)$ avec $U \in \mathcal{U}$.

On vérifie que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts dénombrable de X.

(a) Soient $x \in X$ et D un ouvert de X contenant x. Comme $p^{-1}(p(x))$ est discret, il existe un voisinage ouvert relativement compact W de x dans D tel que $\partial W \cap p^{-1}(p(x)) = \emptyset$.
Comme $p(\partial W)$ est un fermé de Y (car compact) qui ne contient pas $p(x)$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $p(x) \in U$ et $U \cap p(\partial W) = \emptyset$. La composante connexe V de x dans $p^{-1}(U)$ vérifie $V \cap \partial W = \emptyset$, donc V qui est égal à $(V \cap W) \cup (V \cap \complement_X W)$ est inclus dans W, en particulier V est à base dénombrable, ce qui montre que $V \in \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X.

(b) Soit $V_0 \in \mathcal{B}$. Pour chaque $U \in \mathcal{U}$ (où $\mathcal{U}$ est dénombrable), V_0 qui est à base dénombrable d'ouverts ne coupe qu'un nombre au plus dénombrable de composantes connexes — disjointes — de $p^{-1}(U)$. Il existe donc un nombre au plus dénombrable d'ouverts $V \in \mathcal{B}$ tels que $V \cap V_0 \neq \emptyset$.

(c) On fixe $V^* \in \mathcal{B}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des $V \in \mathcal{B}$ tels qu'il existe $V_0, \dots, V_n \in \mathcal{B}$ vérifiant $V_0 = V^*$, $V_n = V$ et $V_k \cap V_{k-1} \neq \emptyset$ pour $1 \leq k \leq n$. Comme X est connexe, la réunion des $\mathcal{B}_n$ est égale à $\mathcal{B}$. De plus $\mathcal{B}_n$ est dénombrable (récurrence). En effet, d'après (b) : si $\mathcal{B}_n$ est dénombrable, alors $\mathcal{B}_{n+1}$ est dénombrable. Ainsi $\mathcal{B}$ est dénombrable.

Définition-Proposition

La *surface de Riemann* associée à un germe de fonction analytique (z_0, f_{z_0}) est la composante connexe X de $\mathscr{G}$ qui contient (z_0, f_{z_0}), à base dénombrable par le lemme de Poincaré-Volterra.

On constate que X muni des cartes $(z, f_z) \in U_f \mapsto z$ pour Ω connexe est une variété analytique complexe de dimension 1, avec $\restriction \pi X\colon X \to \mathbb{C}$ et $F\colon (z, f_z) \in X \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ analytiques.

Exemple 1 (« surface de Riemann du logarithme »)

On choisit $(z_0, f_{z_0}) = \big(1, (\frac{(-1)^{n+1}}{n})_{n\geq 1}\big)$ où le terme a_0 vaut ici 0.

$\Big($On rappelle que : $\mathrm{Log}_P(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ quand $|z-1|<1.\Big)$

L'application analytique $F\colon (z, f_z) \in X \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ est bijective de réciproque $G\colon u \in \mathbb{C} \mapsto (z_0, g_{z_0})$ analytique, avec $z_0 = \mathrm{e}^u$ et $g(z) = u + \mathrm{Log}_P(\mathrm{e}^{-u}z)$.

L'application continue G, dont l'image est connexe, est à valeurs dans X.

Si $u \in \mathbb{C}$ et (z_0, g) lui est associé, on a : $F(G(u)) = g(z_0) = g(\mathrm{e}^u) = u + \mathrm{Log}_P(\mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^u) = u$.

Par prolongement analytique, on a : $\exp(f(z)) = \exp(F(z, f_z)) = z$ pour tout $(z, f_z) \in X$.

Si $(\widetilde{z}, f_{\widetilde{z}}) \in X$ avec $f\colon B(\widetilde{z}, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ $(\varepsilon > 0)$ et $F(\widetilde{z}, f_{\widetilde{z}}) = u$, on a : $\exp(f(z)) = z$ pour tout $z \in B(\widetilde{z}, \varepsilon)$ et $f(\widetilde{z}) = F(\widetilde{z}, f_{\widetilde{z}}) = u$, en particulier $\mathrm{e}^u = \exp(f(\widetilde{z})) = \widetilde{z}$, donc $G(u) = (\widetilde{z}, f_{\widetilde{z}})$ car deux déterminations continues du logarithme sur $B(\widetilde{z}, \varepsilon')$ $(\varepsilon' > 0)$ qui envoient $\widetilde{z}$ sur u sont égales sur $B(\widetilde{z}, \varepsilon')$.

En notant $\widetilde{X} := \{(z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid z = \mathrm{e}^u\}$, on a donc :

(i) $\Phi\colon (z, f_z) \in X \to (z, f(z)) \in \widetilde{X}$ est bijective, analytique de réciproque analytique ;
(ii) $\pi \circ \Phi^{-1}\colon (z, u) \in \widetilde{X} \mapsto z \in \mathbb{C}$ (« projection canonique de la surface de Riemann sur $\mathbb{C}$ ») ;
(iii) $F \circ \Phi^{-1}\colon (z, u) \in \widetilde{X} \mapsto u \in \mathbb{C}$ (« fonction analytique associée à la surface de Riemann »).

Exemple 2 (« surface de Riemann de la racine carrée »)

On choisit $(z_0, f_{z_0}) = \big(1, (\frac{1}{n!} \prod\limits_{0\leq k\leq n-1} (\frac{1}{2} - k))_{n\geq 0}\big)$.

$\Big($On rappelle que : $\sqrt{z}\rfloor_P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod\limits_{0\leq k\leq n-1} (\frac{1}{2} - k)\,(z-1)^n$ quand $|z-1|<1.\Big)$

L'application analytique $F\colon (z, f_z) \in X \mapsto f(z) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ est bijective de réciproque $G\colon u \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mapsto (z_0, g_{z_0})$ analytique, avec $z_0 = u^2$ et $g(z) = u\sqrt{\frac{z}{u^2}}\rfloor_P$.

En notant $\widetilde{X} := \{(z, u) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}\setminus\{0\}) \mid z = u^2\}$, on a à nouveau :

(i) $\Phi\colon (z, f_z) \in X \to (z, f(z)) \in \widetilde{X}$ est bijective, analytique de réciproque analytique ;
(ii) $\pi \circ \Phi^{-1}\colon (z, u) \in \widetilde{X} \mapsto z \in \mathbb{C}$ (« projection canonique de la surface de Riemann sur $\mathbb{C}$ ») ;
(iii) $F \circ \Phi^{-1}\colon (z, u) \in \widetilde{X} \mapsto u \in \mathbb{C}$ (« fonction analytique associée à la surface de Riemann »).