Topologie

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], octobre–décembre 2024

Mercredi 9 octobre 2024

1 Espaces métriques

1.1 Généralités

1.1.1 Distances, espaces métriques

Définition 1.1 *Soit X un ensemble. Une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une* ***distance*** *si*

(o) elle prend des valeurs positives, c'est à dire $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$

(i) elle est non dégénérée *: $\forall (x, y) \in X \times X$,*

$$d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

(ii) elle est symétrique *: $\forall (x, y) \in X \times X$,*

$$d(x, y) = d(y, x)$$

*(iii) elle satisfait l'*inégalité triangulaire *: $\forall (x, y, z) \in X \times X \times X$,*

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Tout couple (X, d), où X est un ensemble muni d'une distance d, est appelé ***espace métrique****.*

Exemples — Les plus courants sont :
- la valeur absolue de la différence entre deux réels sur $\mathbb{R}$: pour $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$;
- le module de la différence entre deux nombres complexes sur $\mathbb{C}$;
- plus généralement, la distance euclidienne entre deux points $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$

Mais d'autres exemples sont possibles :
- la **distance discrète**, sur n'importe quel ensemble X :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

- un exemple sur $\mathbb{R}$: pour $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = |y - x| + |y^2 - x^2|$;
- etc.

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

1.1.2 Normes, espaces normés

Beaucoup d'exemples d'espaces métriques très utiles sont construits à partir d'une *norme* sur un espace vectoriel.

Définition 1.2 *Soit V un espace vectoriel (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une* ***norme*** *sur V est une application $N : V \longrightarrow [0, +\infty[$ satisfaisant les propriétés suivantes.*

(i) elle est non dégénérée : $\forall x \in V$,

$$N(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

(ii) elle est ***homogène de degré 0*** *: $\forall x \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,*

$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

*(iii) elle satisfait l'****inégalité triangulaire*** *: $\forall x, y \in X$,*

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Tout couple (V, N), où V est un espace vectoriel muni d'une norme N est appelé ***espace vectoriel normé****.*

Proposition 1.1 *Pour tout espace vectoriel normé (V, N), l'application $d : V \times V \longrightarrow [0, +\infty[$ définie par*

$$d(x, y) = N(y - x)$$

est une distance, (V, N) est ainsi muni d'une structure d'espace métrique.

Démonstration — Exercice

Nous avons déjà rencontré des exemples d'espaces métriques normés : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, avec

$$\forall x \in V, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Ces exemples importants sont les **espaces euclidiens** (si $n \geq 2$, on peut y donner un sens au théorème de Pythagore : si $x, y \in V$, $x \perp y$ si et seulement si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$). Mais il existe des exemples d'espaces vectoriels normés réels qui ne sont pas euclidiens.

Exemples sur $\mathbb{R}^n$ — pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

— $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

— plus généralement, pour $p \in [1, +\infty[$, $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$

— $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \cdots |x_n|)$

Par ailleurs nous avons aussi rencontré des distances qui ne proviennent pas de normes, par exemple, la distance définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x, y) = |y - x| + |y^2 - x^2|$.

1.1.3 Sous-espace métrique, produit d'espaces métriques

À partir d'espaces métriques, on peut en construire d'autres par les opérations suivantes.

Définition 1.3 *Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$ un sous-ensemble. Alors d induit une métrique sur Y appelée la **restriction de** d à Y et notée $d|_Y$, définie par : $\forall x, y \in Y$,*

$$d|_Y(x, y) = d(x, y)$$

L'espace métrique $(Y, d|_Y)$ est appelé sous-espace métrique de (X, d).

Définition 1.4 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. L'application d définie sur $X \times Y$ par : $\forall (x, y), (x', y') \in X \times Y$,*

$$d\left((x, y), (x', y')\right) := \max\left(d_X(x, x'), d_Y(y, y')\right)$$

*est une distance, appelée **distance produit**, que l'on peut noter $d_X \times d_Y$.*

Notons que, sur $\mathbb{R}^2$ vue comme le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les distances d_∞ et $d_{|\cdot|} \times d_{|\cdot|}$, induites, respectivement, par $\|\cdot\|_\infty$ et $|\cdot|$, coïncident.

1.1.4 Parenthèse : à quoi ça sert ?

La notion de distance est cruciale dans la définition de la continuité d'une fonction. Par exemple, si A est une partie de $\mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et si $a \in A$, rappelons que f est **continue en** a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \quad \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Cette propriété fait intervenir deux exemples de normes, donc de distance : la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et la valeur absolue $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$. En anticipant sur la suite, nous verrons que nous pourrons donner un sens à la notion de continuité en un point $a \in X$ d'une fonction $f : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y) : f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, \quad d_X(a, x) < \alpha \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

1.1.5 Notions « géométriques »

Définition 1.5 *Soit (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r \in [0, \infty[$, alors*

— *le sous-ensemble*
$$B_d(a, r) := \{x \in X \;;\; d(a, x) < r\}$$
*est appelé **boule ouverte de centre** a **et de rayon** r ;*

— *le sous-ensemble*
$$\widetilde{B}_d(a, r) := \{x \in X \;;\; d(a, x) \leq r\}$$
*est appelé **boule fermée de centre** a **et de rayon** r. ;*

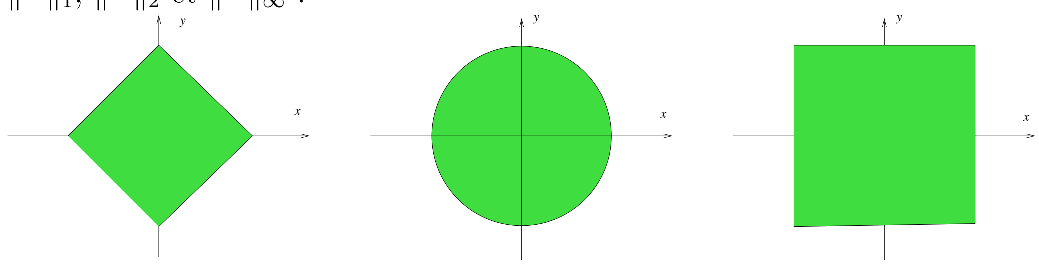
Noter que $B_d(a,r) = \emptyset$ et $\widetilde{B}_d(a,r) = \{a\}$

Exemples

— si $(X,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B_{|\cdot|}(a,r) =]a-r, a+r[$, $\widetilde{B}_{|\cdot|}(a,r) = [a-r, a+r]$

— si $(X,d) = (\mathbb{R}'\|\cdot\|)$ et si $C_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \|x-a\|_2 = r\}$ est le cercle de centre a et de rayon r, alors $B_{\|\cdot\|_2}(a,r)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r, c'est à dire l'ensemble des points *à l'intérieur du cercle $C_r(a)$, mais sans les points de $C_r(a)$* et $\widetilde{B}_{\|\cdot\|_2}(a,r)$ est le disque fermé de centre a et de rayon r, c'est à dire la réunion $B_{\|\cdot\|_2}(a,r) \cup C_r(a)$; (en anticipant $C_r(a)$ est le bord de $B_{\|\cdot\|_2}(a,r)$ ou de $\widetilde{B}_{\|\cdot\|_2}(a,r)$).

— Exemples de boules dans le plan, centrées en $(0,0)$, pour, respectivement, les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$:



Définition 1.6 *Soit (X,d) un espace métrique et soit $A \subset X$ une partie non vide de X. Si le sous-ensemble $\{d(x,y) \ ; \ x,y \in A\} \subset [0,+\infty[$ est majoré, sa borne supérieure*

$$\operatorname{diam}_d(A) := \sup\{d(x,y) \ ; \ x,y \in A\}$$

*est appelée le **diamètre de** A.*

Si $\{d(x,y) \ ; \ x,y \in A\}$ n'est pas majoré, on pose $\operatorname{diam}_d(A) := +\infty$. Si A est vide, on convient de poser $\operatorname{diam}_d(\emptyset) := -\infty$.

Exemples

— $\operatorname{diam}_{|\cdot|}(\mathbb{R}) = \operatorname{diam}_{|\cdot|}(\mathbb{Z}) = \operatorname{diam}_{|\cdot|}(]0,+\infty[) = +\infty$

— $\operatorname{diam}_{|\cdot|}([0,1] \cup \{4\}) = 4$

— si $r > 0$ et $C_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \|x\|_2 = r\}$ est le cercle *euclidien* de rayon r dans le plan $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{diam}_{\|\cdot\|_2}(C_r) = 2r$.

1.1.6 Ensembles bornés

Définition 1.7 *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie de X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) A a un diamètre fini : $\operatorname{diam}_d(A) < +\infty$;

(ii) la restriction de d à $A \times A$ est bornée ;

(iii) A est contenu dans une boule ouverte, c'est à dire : $\exists a \in X$, $\exists r > 0$, $A \subset B_d(a,r)$;

(iv) A est contenu dans une boule fermée, c'est à dire : $\exists a \in X$, $\exists r > 0$, $A \subset \widetilde{B}_d(a,r)$.

*Si l'une de ces propriétés est satisfaite, on dit que A **est borné**.*

Démonstration — Exercice.

1.1.7 Distance entre sous-ensembles

Définition 1.8 *Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$ deux parties de X. La distance entre A et B est la quantité*

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \ ; \ a \in A, b \in B\}$$

Noter que si A rencontre B, c'est à dire $A \cap B \neq \emptyset$, alors $d(A, B) = 0$. En revanche la réciproque n'est pas vraie, ainsi, par exemple, $d([-1, 0[,]0, 1]) = 0$, bien que $[-1, 0[\cap]0, 1] = \emptyset$.

1.2 Topologie induite par une distance

1.2.1 Ouverts, fermés, voisinages

Définition 1.9 *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. On dit que A est* ***un ouvert*** *si*

$$\forall x \in A, \exists r > 0, \quad B_d(x, r) \subset A \tag{1}$$

Un sous-ensemble $F \subset X$ est un ***fermé*** *si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.*

Noter que l'ensemble vide $\emptyset$ et l'espace métrique tout entier X sont deux parties qui sont *à la fois* ouvertes et fermées dans (X, d).

Proposition 1.2 *Soit (X, d) un espace métrique, $a \in X$ et $r \in [0, +\infty[$. Alors*

(i) la boule ouverte $B_d(a, r)$ est un ouvert ;

(ii) la boule fermée $\widetilde{B}_d(a, r)$ est un fermé.

Démonstration — Montrons (i). Soit $x \in B_d(a, r)$, ce qui signifie que $d(a, x) < r$. Posons $s := r - d(a, x) > 0$. Nous allons vérifier que $B_d(x, s) \subset B_d(a, r)$. Soit $y \in B_d(x, s)$, cela signifie que $d(x, y) < s$, donc, par l'inégalité triangulaire,

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r$$

donc $y \in B_d(a, r)$.
Montrons (ii), ce qui revient à montrer que $X \setminus \widetilde{B}_d(a, r)$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus \widetilde{B}_d(a, r)$, ce qui signifie que $d(a, x) > r$. Posons $s := d(a, x) - r > 0$. Nous allons vérifier que $B_d(x, s) \subset X \setminus \widetilde{B}_d(a, r)$. Soit $y \in B_d(x, s)$, cela signifie que $d(x, y) < s$, donc, par l'inégalité triangulaire,

$$d(a, x) \leq d(a, y) + d(y, x) < d(a, y) + s$$

ce qui entraîne

$$d(a, y) > d(a, x) - s = r$$

donc $y \in X \setminus \widetilde{B}_d(a, r)$. □

Définition 1.10 *Soit (X, d) un espace métrique. L'ensemble des ouverts de (X, d), noté $\tau(d)$ est appelé la* ***topologie induite par*** *d.*

Topologie

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], octobre–décembre 2024

Mercredi 16 octobre 2024

Définition 1.1 *Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Un* ***voisinage*** *de x est une partie V de X qui satisfait l'une des deux propriétés (équivalentes) suivantes.*

(i) il existe $\mathcal{O} \in \tau(d)$, $x \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset V$

(ii) $\exists r > 0$, $B_d(x, r) \subset V$

Définition 1.2 *Soit (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Un* ***voisinage*** *de x est une partie V de X qui satisfait l'une des deux propriétés (équivalentes) suivantes.*

(i) il existe $\mathcal{O} \in \tau(d)$, $x \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset V$

(ii) $\exists r > 0$, $B_d(x, r) \subset V$

1.2.2 Topologie

Théorème 1.1 *Soit (X, d) un espace métrique, alors*

(i) $\emptyset$ et X sont des ouverts ;

(ii) si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille (éventuellement infinie !) d'ouverts de (X, d), alors

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \text{ est un ouvert}$$

(iii) si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille ***finie*** *d'ouverts de (X, d), alors*

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i \text{ est un ouvert}$$

Avant d'aborder la preuve de ce résultat, il est important d'avoir à l'esprit le point de logique qui suit.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles d'un ensemble E, alors, pour tout $x \in E$,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \Longleftrightarrow \quad [\ \exists i \in I, \quad x \in A_i]$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad \Longleftrightarrow \quad [\ \forall i \in I, \quad x \in A_i]$$

En résumé $\cup$ correspond à $\exists$ et $\cap$ correspond à $\forall$.

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Démonstration — (i) est une conséquence logique de la définition d'un ouvert.
Montrons (ii) : soit $x \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$, cela signifie qu'il existe $j \in I$ tel que $x \in \mathcal{O}_j$. Comme $\mathcal{O}_j$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_d(x,r)$ soit contenu dans $\mathcal{O}_j$. Donc

$$B_d(x,r) \subset \mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$$

donc $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est ouvert.
Montrons (iii) : soit $x \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$, cela signifie que, $\forall i \in I$, $x \in \mathcal{O}_i$. Comme, $\forall i \in I$, $\mathcal{O}_i$ est ouvert, $\exists r_i > 0$ tel que $B_d(x,r_i) \subset \mathcal{O}_i$. Posons

$$r := \min\{r_i \ ; \ t \in I\}$$

Ici intervient le fait crucial que I est un ensemble fini : cela nous garantit que $r > 0$. Donc $\forall i \in I$, comme $r \leq r_i$, on a $B_d(x,r) \subset B_d(x,r_i)$ et donc

$$B_d(x,r) \ \subset \ \bigcap_{i\in I} B_d(x,r_i) \ \subset \ \bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$$

donc $\bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i$ est ouvert. □

Exemple Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ la famille $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $\mathcal{O}_n :=]0, 1+1/n[$ est une famille d'ouverts. On a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]0, 1+1/n[\ = \ ]0,2[\text{ est un ouvert}$$

et

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]0, 1+1/n[\ = \ ]0,1] \text{ n'est pas un ouvert (ni un fermé d'ailleurs)}$$

Motivé par le théorème 1.1 nous avons la définition suivante.

Définition 1.3 *Soit X un ensemble. On appelle **topologie sur** X toute famile $\tau \in \mathcal{P}(X)$ (ensemble des parties de X) satisfaisant les trois propriétés suivantes :*

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) pour toute famille[2] $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *dans* τ, $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \in \tau$

*(iii) pour toute famille **finie*** $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ *dans* τ, $\bigcap_{i\in I} \mathcal{O}_i \in \tau$

*Les parties $\mathcal{O} \in \tau$ sont alors appelés les **ouverts** de (X, τ).*

Définition 1.4 *Soit X un ensemble muni d'une topologie τ et soit $x \in X$. Un **voisinage** de x est une partie V de X telle que*

$$\exists \mathcal{O} \in \tau, \quad x \in \mathcal{O} \text{ et } \mathcal{O} \subset V$$

2. *id est* telle que, $\forall i \in I$, $\mathcal{O}_i \subset \tau$

1.2.3 Distance et topologie induites sur un sous-ensemble

Étant donné un espace métrique (X, d) et une partie $Y \subset X$, il existe deux façons naturelles d'induire une topologie sur Y. Nous allons voir qu'elles donnent le même résultat.

Définition 1.5 *Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$. La distance induite par d sur Y est la restriction de d à $Y \times Y$, notée d_Y :*

$$\begin{array}{rccc} d_Y : & Y \times Y & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) \end{array}$$

Une notion apparentée existe dans le cadre plus général des espaces topologiques.

Définition 1.6 *Soit X un ensemble muni d'une topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. On note τ_Y l'ensemble*

$$\tau_Y := \{\ U \cap Y\ ;\ U \in \tau\}$$

l'ensemble des traces (intersections) des ouverts de (X, τ) avec Y. On montre facilement que τ_Y vérifie les trois axiomes d'une topologie, notée τ_Y et appelée ***topologie induite*** *par τ sur Y.*

Nous disposons ainsi de deux façons différentes de définir une topologie sur $Y \subset X$ à partir d'une distance d sur X :

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r] \arrow[d, dash] & \tau(d) \arrow[d, "\tau(d) \mapsto \tau(d)_Y"] \\ d_Y \arrow[r, "d_Y \mapsto \tau(d_Y)"'] & * \end{tikzcd}$$

Elles donnent la même topologie.

Proposition 1.1 *Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$, alors*

$$\tau(d_Y) = \tau(d)_Y$$

Démonstration — a) Montrons que $\tau(d)_Y \subset \tau(d_Y)$, ce qui revient à montrer que, pour tout élément $\mathcal{O} \in \tau(d)_Y$, nous avons $\mathcal{O} \in \tau(d_Y)$. Par hypothèse, $\exists U \in \tau(d)$, tel que $\mathcal{O} = U \cap Y$. Il s'agit de montrer que $\forall x \in \mathcal{O}$, $\exists r > 0$, $B_{d_Y}(x, r) \subset \mathcal{O}$. Or

$$x \in \mathcal{O} \Longrightarrow x \in U \Longrightarrow \exists r > 0, \quad B_d(x, r) \subset U$$

ce qui entraîne, en prenant l'intersection avec Y des deux côtés :

$$B_{d_Y}(x, r) = B_d(x, r) \cap Y \subset U \cap Y = \mathcal{O}$$

b) Montrons la réciproque $\tau(d_Y) \subset \tau(d)_Y$. Considérons un élément quelconque $\mathcal{O} \in \tau(d_Y)$ et montrons que $\mathcal{O} \in \tau(d)_Y$. Par hypothèse,

$$\forall x \in \mathcal{O}, \exists r_x > 0, \quad B_{d_Y}(x, r_x) \subset \mathcal{O}$$

Alors

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x\in\mathcal{O}} B_{d_Y}(x, r_x) = \bigcup_{x\in\mathcal{O}} (B_d(x, r_x) \cap Y) = \left(\bigcup_{x\in\mathcal{O}} B_d(x, r_x)\right) \cap Y = U \cap Y$$

puisque $U := \bigcup_{x\in\mathcal{O}} B_d(x, r_x)$ est un ouvert de (X, d) . Donc $\mathcal{O} \in \tau(d)_Y$. □

Corollaire 1.1 *Soit (X, d) un espace métrique, $Y \subset X$ et soient $\mathcal{O}, F \subset Y$.*

(i) $\mathcal{O}$ est ouvert pour $d_Y \iff \exists U \subset X$, ouvert pour d, tel que $\mathcal{O} = U \cap Y$.

(ii) F est fermé pour $d_Y \iff \exists \Phi \subset X$, fermé pour d, tel que $F = \Phi \cap Y$.

Démonstration — (i) est une traduction de la proposition précédente. Montrons (ii) :

$$\begin{aligned} F \text{ est fermé pour } d_Y &\iff Y \setminus F \text{ est ouvert pour } d_Y \\ &\iff \exists U \subset X, \quad U \in \tau(d) \text{ et } Y \setminus F = U \cap Y \\ &\iff \exists U \subset X, \quad U \in \tau(d) \text{ et } F = Y \setminus (U \cap Y) = (X \setminus U) \cap Y \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $F = Y \setminus (Y \setminus F)$. En notant $\Phi := X \setminus U$ et en remarquant que Φ est fermé pour d si et seulement si U est ouvert, nous avons donc :

$$F \text{ est fermé pour } d_Y \iff \exists \Phi \subset X, \text{ fermé pour } d, \quad F = \Phi \cap Y$$

D'où le résultat. □

1.3 Equivalences

Définition 1.7 *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. On dit que d_1 et d_2 sont* ***(topologiquement) équivalentes*** *si $\tau(d_1) = \tau(d_2)$.*

De façon immédiate, la relation « d_1 est topologiquement équivalente à d_2 » est une relation d'équivalence.

Définition 1.8 *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. On dit que d_1 est* ***plus grossière que*** *d_2, ou que d_2 est* ***plus fine que*** *d_1 si $\tau(d_1) \subset \tau(d_2)$.*

En effet, le fait que $\tau(d_1) \subset \tau(d_2)$ signifie que $\tau(d_2)$ contient plus d'ouverts que $\tau(d_1)$. Remarquons que l'on a à la fois que d_1 est plus grossière que d_2 et d_1 est plus fine que d_2 si et seulement si $\tau(d_1) = \tau(d_2)$, c'est à dire si et seulement si d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

Proposition 1.2 *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. Alors $\tau(d_1)$ est plus grossière que $\tau(d_2)$ si et seulement si*

$$\forall x \in X, \forall r > 0, \exists \varepsilon > 0, \quad B_{d_2}(x, \varepsilon) \subset B_{d_1}(x, r) \tag{1}$$

Démonstration — Supposons que $\tau(d_1)$ est plus grossière que $\tau(d_2)$. Alors $\forall \mathcal{O} \in \tau(d_1)$, $\mathcal{O} \in \tau(d_2)$. On peut appliquer cela à $\mathcal{O} = B_{d_1}(x,r) \in \tau(d_1)$, on en déduit que $B_{d_1}(x,r) \in \tau(d_2)$. En particulier $\exists \varepsilon > 0$, $B_{d_2}(x,\varepsilon) \subset B_{d_1}(x,r)$, donc (1) a lieu.
Montrons la réciproque et supposons que (1) a lieu. Soit $\mathcal{O} \in \tau(d_1)$. Alors $\forall x \in \mathcal{O}$, $\exists r > 0$, $B_{d_1}(x,r) \subset \mathcal{O}$. D'après (1), $\exists \varepsilon > 0$, $B_{d_2}(x,\varepsilon) \subset B_{d_1}(x,r) \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert pour d_2. □

Corollaire 1.2 *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. Alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si et seulement si*

$$\begin{cases} \forall x \in X, \forall r > 0, \exists \varepsilon > 0, & B_{d_2}(x,\varepsilon) \subset B_{d_1}(x,r) \\ \forall x \in X, \forall r > 0, \exists \varepsilon > 0, & B_{d_1}(x,\varepsilon) \subset B_{d_2}(x,r) \end{cases} \tag{2}$$

Démonstration — *Il suffit d'appliquer la proposition précédente dans les deux sens.* □

Une notion plus forte, définie uniquement pour les distances (et qui n'a donc pas de sens pour les topologies en général), est la suivante.

Définition 1.9 *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. On dit que d_1 est **bilipschitz équivalente** à d_2 si $\exists \alpha, \beta > 0$,*

$$\forall x, y \in X, \quad \alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$$

Proposition 1.3 *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. Si d_1 et d_2 sont **bilipschitz équivalentes**, alors elles sont topologiquement équivalentes.*

Démonstration — Il suffit d'appliquer le corollaire 1.2 avec l'inclusion suivante, valable pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$:

$$B_{d_1}(x,r) \subset B_{d_2}(x,\beta r) \subset B_{d_1}\left(x, \frac{\beta}{\alpha} r\right)$$

□

Exemple — L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni des normes $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$, $\|x\|_2 := \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2}$. Elles satisfont les inégalités

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Les distances associées sont donc toutes bilipschitz équivalentes et sont donc toutes topologiquement équivalentes.

1.4 Intérieur, adhérence, extérieur, bord

Définition 1.10 *Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$ et $x \in X$.*

(i) *x est **intérieur** à A si :*

$$\exists r > 0, \quad B_d(x,r) \subset A$$

*On note $\mathring{A} = \mathrm{Int}A := \{x \in X \ ; \ \exists r > 0, \ B_d(x,r) \subset A\}$ l'ensemble des points intérieurs de A et on le nomme **intérieur de** A.*

(ii) *x est **adhérent** à A si :*

$$\forall r > 0, \quad B_d(x,r) \cap A \neq \emptyset$$

*On note $\overline{A} := \{\forall r > 0, \ B_d(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$ l'ensemble des points adhérents de A et on le nomme **adhérence de** A.*

(iii) *x est **extérieur** à A si :*

$$\exists r > 0, \quad B_d(x,r) \cap A = \emptyset$$

*On note $\mathrm{Ext}A := \{x \in X \ ; \ \exists r > 0, \ B_d(x,r) \cap A = \emptyset\}$ l'ensemble des points extérieurs de A et on le nomme **extérieur de** A.*

(iv) *x est **point de frontière** de A si :*

$$\forall r > 0, \quad B_d(x,r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{et} \quad B_d(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

*On note $\partial A := \{\forall r > 0, \ B_d(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B_d(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$ l'ensemble des points de frontière de A et on le nomme **bord de** A.*

Proposition 1.4 *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors*

(i) *L'intérieur de A coïncide avec l'ensemble des points $x \in A$ tels que A est un voisinage de x ; $\mathring{A}$ est aussi le plus grand ouvert contenu dans A :*

$$\mathring{A} = \bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d); \ \mathcal{O} \subset A} \mathcal{O} \tag{3}$$

(ii) *l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A :*

$$\overline{A} = \bigcap_{(X \setminus F) \in \tau(d); \ F \supset A} F \tag{4}$$

(iii) *l'extérieur de A coïncide avec l'intérieur de son complémentaire :*

$$\mathrm{Ext}(A) = X \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}(X \setminus A) \tag{5}$$

et

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A} \tag{6}$$

(iv) le bord de A est son adhérence privée de son intérieur :

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} \text{ est fermé}$$

Démonstration — Preuve de (i) : si $x \in \mathring{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$, donc A est un voisinage de x ; réciproquement, si A est un voisinage de x, alors il existe $r > 0$ tel que $B_d(x, r) \subset A$, ce qui signifie que $x \in \mathring{A}$ par définition de $\mathring{A}$.

Montrons (3) en commençant par prouver l'inclusion $\bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset A} \mathcal{O} \subset \mathring{A}$. Soit $\mathcal{O} \subset A$ un ouvert. Alors, $\forall x \in \mathcal{O}$, $\exists r > 0$, $B_d(x, r) \subset \mathcal{O} \subset A$. Cela signifie que tout point $x \in \mathcal{O}$ est dans $\mathring{A}$. Cela prouve que, si $\mathcal{O} \subset A$, alors $\mathcal{O} \subset \mathring{A}$. Donc $\bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset A} \mathcal{O} \subset \mathring{A}$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in \mathring{A}$, alors $\exists r > 0$, $B_d(x, r) \subset A$. Nous observons que $B_d(x, r)$ est un ouvert contenu dans A, donc dans $\bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset A} \mathcal{O}$. En particulier $x \in \bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset A} \mathcal{O}$. Comme cela est vrai pour tout $x \in \mathring{A}$, cela prouve $\mathring{A} \subset \bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset A} \mathcal{O}$.

— *Preuve de (iii)* (la preuve de (ii) viendra après) : commençons par observer que $B_d(x, r) \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow B_d(x, r) \subset X \setminus A$. Donc

$$\mathrm{Ext}(A) = \{x \in X \ ;\ \exists r > 0, B_d(x, r) \subset X \setminus A\} = \mathrm{Int}(X \setminus A)$$

Par ailleurs (rappelons que le symbole $\neg$ signifie « non » : négation en logique)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}(A) &= \{x \in X \ ;\ \exists r > 0, B_d(x, r) \cap A = \emptyset\} \\
&= \{x \in X \ ;\ \neg\, [\forall r > 0, B_d(x, r) \cap A \neq \emptyset]\ \} \\
&= \{x \in X \ ;\ \neg\, [x \in \overline{A}]\ \} = X \setminus \overline{A}
\end{aligned}$$

ce qui montre (5). Pour montrer (6), nous appliquons (5) avec $X \setminus A$ à la place de A, ce qui nous donne :

$$X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \mathrm{Int}\,(X \setminus (X \setminus A)) = \mathring{A}$$

donc, en prenant le complémentaire de chaque côté,

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus \Big(X \setminus (\overline{X \setminus A})\Big) = X \setminus \mathring{A}$$

— *Preuve de (ii)* : Nous utilisons la propriété

$$\mathrm{Int}(X \setminus A) = \bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset X \setminus A} \mathcal{O}$$

conséquence de (i) et la propriété $X \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}(X \setminus A)$ vue au (iii) :

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= X \setminus (X \setminus \overline{A}) = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A) \\
&= X \setminus \left(\bigcup_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset X \setminus A} \mathcal{O} \right) = \bigcap_{\mathcal{O} \in \tau(d);\, \mathcal{O} \subset X \setminus A} (X \setminus \mathcal{O})
\end{aligned}$$

Et comme l'ensemble des parties $F = X \setminus \mathcal{O}$, telles que $\mathcal{O}$ soit un ouvert contenu dans $X \setminus A$ coïncide avec l'ensemble des fermés qui contiennent A, on en déduit (4).

— *Preuve de (iv)* : D'après la définition du bord de A, il est immédiat que $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Cela implique en particulier que ∂A est fermé, puisqu'il est l'intersection de deux fermés. Grâce à (6), nous savons que $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$ et donc $\partial A = \overline{A} \cap (X \setminus \mathring{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$. $\square$

Topologie

Cours de L3 par Frédéric Hélein[1], octobre–décembre 2024

Mercredi 23 octobre 2024

1.5 Intérieur, adhérence, extérieur, bord (suite et fin)

Proposition 1.1 *Soit (X,τ) un espace topologique et A et B deux parties de X. Alors*

$$\begin{array}{ll} \mathring{A} \cap \mathring{B} = \mathrm{Int}(A\cap B) & \qquad \overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cup B} \\ \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \mathrm{Int}(A\cup B) & \qquad \overline{A}\cap\overline{B} \supset \overline{A\cap B} \end{array}$$

Démonstration — Exercice. □

Noter que les inclusions sur la deuxième ligne sont strictes *en général*. Ainsi, pour $X=\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, et pour $A=\mathbb{Q}$ et $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on a :

— $\mathring{\mathbb{Q}} = \mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$ et donc $\mathring{\mathbb{Q}}\cup\mathrm{Int}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$, mais $\mathbb{R}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ et donc, bien évidemment, $\mathrm{Int}(\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})) = \mathbb{R}$.

— $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et donc $\overline{\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, mais $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$ et donc $\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} = \emptyset$.

1.6 Points d'accumulation

Définition 1.1 *Soit (X,d) un espace métrique, $A\subset X$ et $x\in X$. On dit que*

(i) x est un ***point d'accumulation*** *de A si*

$$\forall r>0,\quad (B_d(x,r)\setminus\{x\})\cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé ***ensemble dérivé de*** *A et est noté $D(A)$.*

(ii) x est un ***point isolé de*** *A si*

$$\exists r>0,\quad B_d(x,r)\cap A = \{x\}$$

L'ensemble des points isolés de A est noté $\mathrm{Isol}(A)$.

Noter que, si x est un point isolé de A, alors, forcément $x\in A$. En revanche un point d'accumulation de A n'est pas forcément un point de A.

Proposition 1.2 *Soit (X,d) un espace métrique, $A\subset X$. Alors*

$$\overline{A} = \mathrm{Isol}(A)\sqcup D(A)$$

Démonstration — Dans un sens l'inclusion $\supset$ est immédiate. Dans l'autre sens, pour montrer que $\overline{A}\subset\mathrm{Isol}(A)\sqcup D(A)$, ce n'est pas beaucoup plus difficile : si $x\in\overline{A}$, alors, soit x est isolé de A, soit il ne l'est pas, et on conclut alors facilement que $x\in D(A)$. . □

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

1.7 Limites de suites

Définition 1.2 *Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans X et $\ell \in X$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et on note*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies d(x_n, \ell) < \varepsilon \tag{1}$$

Proposition 1.3 *Dans tout espace métrique, si une suite admet une limite, celle-ci est unique.*

Démonstration — Soit (X,d) un espace métrique et et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans X. Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 soient deux limites de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_1 \implies d(x_n, \ell_1) < \varepsilon$$

et

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_2 \implies d(x_n, \ell_2) < \varepsilon$$

Donc, en particulier, en choisissant n'importe quel entier $n \geq \sup(N_1, N_2)$, on a alors

$$d(\ell_1, \ell_2) \leq d(\ell_1, x_n) + d(x_n, \ell_2) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

ce qui prouve que $d(\ell_1, \ell_2)$ est plus petit que n'importe quel réel strictement positif et, donc, est nul. Dont $\ell_1 = \ell_2$. $\square$

Définition 1.3 (valeur d'adhérence) *Soit (X,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans X et $a \in X$. On dit que a est une* ***valeur d'adhérence*** *de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Cela équivaut à la propriété :*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad [\ n \geq N \text{ et } x_n \in B_d(a, \varepsilon)\ ]$$

Le résultat suivant est utile pour caractériser l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.

Proposition 1.4 *Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$ et $y \in X$. Alors*

$$y \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ suite à valeur dans } A, \lim_{n\to+\infty} x_n = y \tag{2}$$

Démonstration — Montrons d'abord $\Longrightarrow$. Supposons que $y \in \overline{A}$, qui signifie, par définition, que $\forall r > 0$, $B_d(y,r) \cap A \neq \emptyset$. Nous appliquons cette propriété pour $r = \frac{1}{n+1}$, où $n \in \mathbb{N}$. Cela nous donne que $B_d(y, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$ et donc $\exists x_n \in B_d(y, \frac{1}{n+1}) \cap A$. Nous construisons ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans A et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, y) < \frac{1}{n+1}$$

Il est alors facile de conclure que $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$.

Montrons $\Longleftarrow$. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = y$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies d(x_n, y) < \varepsilon \iff x_n \in B_d(y, \varepsilon)$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, en choisissant $n \in \mathbb{N}$ telle que $n \geq N$, nous avons $x_n \in B_d(y, \varepsilon)$, ce qui prouve que $B_d(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. $\square$

2 Applications entre espaces métriques

2.1 Continuité

Définition 2.1 (application continue en un point) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application et $x_0 \in X$. On dit que f* ***est continue en*** *x_0 si*

$$\forall r > 0, \exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \varepsilon \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < r \tag{3}$$

On dit que f ***est continue sur*** *X si f est continue en chaque point $x_0 \in X$.*

Proposition 2.1 (la composée de deux applications continues est continue) *Soit (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, $g : X \longrightarrow Y$ et $f : Y \longrightarrow Z$ deux applications et $x_0 \in X$. Supposons que g est continue en x_0 et f est continue en $g(x_0)$. Alors $f \circ g$ est continue en x_0.*

Démonstration — Exercice. $\square$

2.2 Limite d'une fonction en un point

Définition 2.2 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \longrightarrow Y$ une application, $x_0 \in X$ et $\ell \in Y$. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 et on écrit*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X, \quad [x \neq x_0 \text{ et } d_X(x, x_0) < \alpha] \implies d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon \tag{4}$$

Remarquons qu'aurait pu adopter une autre définition, qui stipule que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \alpha \implies d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon \tag{5}$$

En fait, les deux définitions se rencontrent dans la littérature, d'où une ambiguïté lorsqu'on lit $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Nous adopterons dans la suite la définition donnée par (4).

Proposition 2.2 *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques,* $f : X \longrightarrow Y$ *une application,* $x_0 \in X$*. Alors* f *est continue en* x_0 *si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Démonstration — Exercice. □

On peut remarquer que, si on avait adopté la définition donnée par (5), le même critère de continuité serait valable, mais pourrait être simplifié comme suit : f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe.

Définition 2.3 (limite de la valeur d'une fonction en un point d'accumulation) *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques, soit* $A \subset X$ *et soit* $f : A \longrightarrow Y$ *une application. Soit* $a \in X$ *un point d'accumulation de* A *et* $\ell \in Y$ *On dit que* f *converge vers* ℓ *lorsque* x *varie dans* A ***et*** *tend vers* a *et on écrit*

$$\lim_{x \to a;\ x \in A} f(x) = \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad d_X(x, a) < \alpha \implies d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon$$

Dans le cas ou A est un voisinage de a (et donc en particulier $a \in A$), cette définition signifie simplement que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et équivaut à dire que $f(a) = \ell$ et que f est continue en a. Mais d'autres situations se rencontrent couramment, comme le montre l'exemple suivant.
Exemple — $X = Y = \mathbb{R}$ et $A =]0, +\infty[$. Alors 0 est un point d'accumulation de A. Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\forall x \in]0, +\infty[$. Alors

$$\lim_{x \to 0;\ x \in]0,+\infty[} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \text{ limite de } f \text{ à droite en } 0$$

2.3 Caractérisation topologique de la continuité

Théorème 2.1 *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. Alors*

(i) f *est continue sur* X *si et seulement si, pour tout ouvert* $\mathcal{O}$ *de* (Y, d_Y)*, l'image inverse* $f^{-1}(\mathcal{O})$ *est un ouvert de* (X, d_X)*.*

(ii) f *est continue sur* X *si et seulement si, pour tout* $x_0 \in X$ *et pour toute partie* $B \subset Y$ *qui est un voisinage de* $f(x_0)$ *dans* (Y, d_T)*, l'image inverse* $f^{-1}(B)$ *est un voisinage de* x_0 *dans* (X, d_X)*.*

Démonstration de (i) — Supposons que f est continue sur X au sens de la définition 2.1. Soit $\mathcal{O} \in \tau(d_Y)$ et $x_0 \in f^{-1}(\mathcal{O})$, ce qui équivaut à $f(x_0) \in \mathcal{O}$. Alors, comme $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y, il existe $r > 0$ tel que $B_{d_Y}(f(x_0), r) \subset \mathcal{O}$. Or f est continue en x_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \quad d_X(x, x_0) < \varepsilon \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < r$$

ce que l'on peut traduire par :

$$\forall x \in X, \quad x \in B_{d_X}(x_0, \varepsilon) \implies f(x) \in B_{d_Y}(f(x_0), r)$$

ou encore : $B_{d_X}(x_0, \varepsilon) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x_0), r))$. Mais comme $B_{d_Y}(f(x_0), r) \subset \mathcal{O}$, qui implique $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x_0), r)) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, on en déduit que $B_{d_X}(x_0, \varepsilon) \subset f^{-1}(\mathcal{O})$. Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de (X, d_X).

Montrons la réciproque : nous supposons que l'image inverse de toute ouvert $\mathcal{O}$ de (Y, d_Y) est un ouvert de (X, d_X). Soit $x_0 \in X$ et montrons que f est continue en x_0. Pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B_{d_Y}(f(x_0), r)$ est un ouvert de (Y, d_Y), donc $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x_0), r))$ est un ouvert de (X, d_X). Cet ouvert contient en particulier x_0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{d_X}(x_0, \varepsilon) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x_0), r))$, ce qui prouve le résultat. $\square$

Puisque, pour toute application $f : X \longrightarrow Y$ et pour toute partie $B \subset Y$, on a $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$, on en déduit la caractérisation suivante.

Corollaire 2.1 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est continue sur X si et seulement si, pour tout fermé F de (Y, d_Y), l'image inverse $f^{-1}(F)$ est un fermé de (X, d_X).*

Une conséquence de ces résultats est qu'il est possible d'étendre la notion de continuité entre deux espaces topologiques.

Définition 2.4 *Soit (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que*

(i) f est continue si l'image inverse par f de tout ouvert $\mathcal{O}$ de (Y, τ_Y) est un ouvert de (X, τ_X).

(ii) f est continue si l'image inverse par f de tout fermé F de (Y, τ_Y) est un fermé de (X, τ_X).

Bien entendu, dans cette définition, (i) et (ii) sont équivalents et il suffit de vérifier l'une de ces deux assertions.

Topologie

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], octobre–décembre 2024

Mercredi 6 novembre 2024

2.4 Homéomorphismes, applications ouvertes ou fermées

Définition 2.1 (homéomorphisme) *Soit (X, τ_X) et (Y, τ_Y) deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. On dit que f est un homéomorphisme si*

(i) f est une bijection

(ii) f est continue sur X.

(iii) la bijection réciproque f^{-1} est continue sur Y.

Définition 2.2 (applications ouvertes, fermées) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.*

- *on dit que f est* ***ouverte*** *si l'image de tout ouvert de (X, τ_X) par f est un ouvert de (Y, τ_Y).*
- *on dit que f est* ***fermée*** *si l'image de tout fermé de (X, τ_X) par f est un fermé de (Y, τ_Y).*

En général une application continue n'est ni ouverte, ni fermée :

(i) l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ est *continue*, mais l'image de tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ (à commencer par $\mathbb{R}$) est $\{1\}$ qui est fermée et non ouvert. Cette application n'est donc *pas ouverte* mais elle est *fermée.*

(ii) l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$ (projection sur l'axe des x parallèlement à l'axe de y) est *continue.* L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy = 1\}$ (hyperbole du plan) est fermé, mais son image $f(A)$ est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et n'est *pas fermée.* L'application f n'est donc *pas fermée.*
En revanche f est *ouverte* : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout point $(x_0, y_0) \in U$, $\exists r > 0$ tel que $B_{\mathbb{R}^2}((x_0, y_0), r) \subset U$ et il est clair que $f(U)$ contient $]x_0 - r, x_0 + r[$. Donc $f(U)$ est ouvert.

(iii) tout homéomorphisme $f : X \longrightarrow Y$ entre deux espaces topologiques (X, τ_X) et (Y, τ_Y) est à la fois continu, ouvert et fermé, car l'image d'un ouvert U de (X, τ_X) est alors égale à l'image inverse par l'application réciproque f^{-1}.

2.5 Continuité et suites

Proposition 2.1 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soit $a \in X$. Alors les deux assertions suivantes sont* ***équivalentes****.*

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

(i) f *est continue en* a.

(ii) *pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeur dans* X *et qui converge vers* a *dans* (X, d_X)*, la suite* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(a)$.

Démonstration — Dans un sens l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est simple et c'est un bon exercice de le vérifier.
Montrons l'implication inverse (ii) $\Longrightarrow$ (i) en montrant sa contraposée $\neg$(i) $\Longrightarrow$ $\neg$(ii) (rappel : $\neg$ = non) : nous supposons que f n'est pas continue en a. Cela signifie

$$\neg\left[\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall x \in X,\ d_X(x,a) < \alpha \implies d_X(f(x), f(a)) < \varepsilon\right]$$

c'est à dire :

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\alpha > 0, \exists x \in X,\ d_X(x,a) < \alpha \text{ et } d_X(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$$

Appliquons cela pour $\alpha = \frac{1}{n+1}$, pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons ainsi construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_X(x_n, a) < \frac{1}{n+1} \text{ et } d_X(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ mais, en même temps, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$ dans (Y, d_Y). Donc (ii) est faux. □

2.6 Applications lipschitziennes, uniformément continues

Les notions suivantes n'ont de sens qu'entre des espaces métriques. Elles sont plus fortes que la continuité.

Définition 2.3 (application uniformément continue) *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. On dit que* f *est* ***uniforme continuité*** *si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \quad \forall x, x_0 \in X,\ d_X(x, x_0) < \alpha \implies d_Y(f(x), (x_0)) < \varepsilon \tag{1}$$

Définition 2.4 (application lipschitzienne) *Soit* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et* $f : X \longrightarrow Y$ *une application. On dit que* f *est* ***lipschitzienne*** *s'il existe une constante* $k \in]0, +\infty[$ *telle que*

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq k\ d_X(x_1, x_2) \tag{2}$$

Proposition 2.2 *(i) Toute application lipschitzienne entre deux espaces métriques est uniformément continue.*

(ii) Tout application uniformément continue entre deux espaces métriques est continue.

Démonstration — Exercice (pour (i), on pourra vérifier que le choix $\alpha = \varepsilon/k$ convient). $\square$

La réciproque de (i) est fausse : il existe des applications uniformément continues qui ne sont pas lipschitziennes. Un exemple est $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Cette fonction est *uniformément continue*[2], mais en revanche, elle *n'est pas lipschitzienne.* En effet, pour $x > 0$,

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{n'est pas borné}$$

donc il n'existe pas de constante $k > 0$ telle que, $\forall x, y \in [0,+\infty[$, $|f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y|$.

La réciproque de (ii) est également fausse : l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est *continue*, mais *n'est pas uniformément continue* (étudier le rapport $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}$ lorsque $|x|$ et $|y|$ sont grands). En revanche la restriction de cette application sur tout intervalle *borné* est lipschitzienne (montrez le).

Une notion utile est la suivante.

Définition 2.5 (module de continuité) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Le* module de continuité *de f est l'application ω_f : $[0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[\cap\{+\infty\}$ définie par*

$$\forall r \geq 0, \quad \omega_f(r) := \sup\{d_Y(f(x_1), f(x_2))\ ;\ d_X(x_1, x_2) < r\} \tag{3}$$

Une conséquence immédiate de cette définition est que

$$\forall x_1, x_2 \in X, \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega_f(d_X(x_1, x_2)) \tag{4}$$

Proposition 2.3 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors f est uniformément continue si et seulement si ω_f est définie sur un voisinage de 0 dans $[0,+\infty[$ et*

$$\lim_{r\to 0} \omega_f(r) = 0$$

Démonstration — (i) Supposons que f est uniformément continue. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x_1, x_2 \in X$, si $d_X(x_1, x_2) < \alpha$, alors $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ et donc, si $r \leq \alpha$, $d_X(x_1, x_2) < r$ entraîne que $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ et on en déduit que $\omega_f(r) < \varepsilon$. Donc $\lim_{r\to 0} \omega_f(r) = 0$.
(ii) Réciproquement supposons que $\lim_{r\to 0} \omega_f(r) = 0$, ce qui signifie que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall r \in [0,+\infty[$, $r < \alpha \Longrightarrow \omega_f(r) < \varepsilon$. Alors, si $d_X(x_1, x_2) < \alpha$, on a $\omega_f(d_X(x_1, x_2)) < \varepsilon$, ce qui entraîne $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ par (4). $\square$

2. Exercice : le montrer. On pourra au préalable établir l'inégalité $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, $\forall x, x \in [0,+\infty[$.

On remarque que, si $f : X \longrightarrow Y$ est lipschitzienne de rapport $k > 0$, alors $\omega_f(r) \leq kr$, ce qui permet de retrouver le fait que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

2.7 Applications sur et à valeur dans un produit cartésien d'espaces métriques

Proposition 2.4 *Soit (X_1, d_{X_1}) et (X_2, d_{X_2}) deux espaces métriques. Considérons les applications projections du produit $X_1 \times X_2$ vers, respectivement, le premier et le deuxième facteur :*

$$p_1 : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \longrightarrow & X_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array} \qquad p_2 : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \longrightarrow & X_1 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

Alors p_1 et p_2 sont lipschitziennes et donc continues.

Démonstration — Exercice (l'occasion de se rappeler que la distance sur $X_1 \times X_2$ est définie par $d_{X_1 \times X_2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_{X_1}(x_1, y_1), d_{X_2}(x_2, y_2))$). □

Proposition 2.5 *Soit (X, d_X), (Y_1, d_{Y_1}) et (Y_2, d_{Y_2}) des espaces métriques et soit $f = (f_1, f_2) : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ une application. Alors f est continue si et seulement si les applications coordonnées $f_1 : (X, d_X) \longrightarrow (Y_1, d_{Y_1})$ et $f_2 : (X, d_X) \longrightarrow (Y_2, d_{Y_2})$ sont continues.*

Démonstration — Dans un sens l'implication f continue $\Longrightarrow$ f_1 et f_2 continues est un corollaire de la proposition précédente : il suffit d'observer que $f_1 = p_1 \circ f : X \longrightarrow Y_1$ et $f_2 = p_2 \circ f : X \longrightarrow Y_2$.

Réciproquement, supposons que f_1 et f_2 sont continues. Soit $a \in X$, montrons que f est continue en a. Pour tout $\varepsilon > 0$, en utilisant la continuité de f_1 et f_2, on a

$$\begin{array}{ll} \exists \alpha_1 > 0, \forall x \in X, & d_X(x, a) < \alpha_1 \implies d_{Y_1}(f_1(x), f_1(a)) < \varepsilon \\ \exists \alpha_2 > 0, \forall x \in X, & d_X(x, a) < \alpha_1 \implies d_{Y_2}(f_2(x), f_2(a)) < \varepsilon \end{array}$$

Donc, si on pose $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$, on a : $\forall x \in X$,

$$d_X(x, a) < \alpha \implies d_{Y_1 \times Y_2}(f(x), f(a)) = \max [\, d_{Y_1}(f_1(x), f_1(a)) \,,\, d_{Y_2}(f_2(x), f_2(a)) \,] < \varepsilon$$

ce qui prouve la continuité de f en a. □

3 Suites de fonctions

3.1 Convergence simple et uniforme

3.1.1 Préliminaire : distance (étendue) du sup

Notons $[0, +\infty] := [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Définition 3.1 (distance étendue) *Soit X un ensemble. Une **distance étendue** est une application $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty]$ qui satisfait les trois axiomes d'une distance (elle est non dégénérée*[3]*, symétrique*[4] *et elle satisfait l'inégalité triangulaire*[5]*).*

Un exemple important est le suivant. Pour toute paire d'ensemble X et Y, on note $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications $X \longrightarrow Y$.

Définition 3.2 (distance étendue du sup) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On définit l'application $d_\infty : \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(X, Y) \longrightarrow [0, +\infty]$ comme suit : $\forall f, g \in \mathcal{F}(X, Y)$,*

$$d_\infty(f, g) := \sup\{ \ d_Y(f(x), g(x)) \ ; \ x \in X \ \} \tag{5}$$

Proposition 3.1 *L'application $d_\infty : \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(X, Y)$ définie par (5) est une distance étendue sur $\mathcal{F}(X, Y)$.*

Démonstration — Premièrement d_∞ est non dégénérée car, $\forall f, g \in \mathcal{F}_b(X, Y)$, si $d_\infty(f, g) = 0$, alors, $\forall x \in X$, $d_Y(f(x), g(x)) \leq 0 \iff d_Y(f(x), g(x)) = 0$ et donc $f = g$.
— De plus il est immédiat que d_∞ est symétrique.
— Montrons que d_∞ satisfait l'inégalité triangulaire. Soit $f, g, h \in \mathcal{F}_b(X, Y)$, alors $\forall x \in X$,

$$\begin{array}{rccc} & d_Y(f(x), g(x)) & \leq & d_\infty(f, g) \\ & d_Y(g(x), h(x)) & \leq & d_\infty(g, h) \\ \text{et donc :} & d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), h(x)) & \leq & d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) \end{array}$$

Donc, par l'inégalité triangulaire dans Y,

$$d_Y(f(x), h(x)) \leq d_Y(f(x), g(x)) + d_Y(g(x), h(x)) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$$

et ainsi $d_\infty(f, h) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), h(x)) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$. □

Définition 3.3 (applications bornées) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est **bornée** s'il existe un ensemble borné $B \subset Y$ tel que, $\forall x \in X$, $f(x) \in B$. On note $\mathcal{F}_b(X, Y)$ l'ensemble des applications **bornées** $f : X \longrightarrow Y$.*

On remarque que la restriction de d_∞ à $\mathcal{F}_b(X, Y)$ est une distance et $(\mathcal{F}_b(X, Y), d_\infty)$ est ainsi muni d'une structure d'espace métrique.

3. $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$
4. $\forall x, y \in X$, $d(y, x) = d(x, y)$
5. $\forall x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

3.1.2 Convergence simple et uniforme d'une suite d'applications

Définition 3.4 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit $f : X \longrightarrow Y$ une application et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $f_n : X \longrightarrow Y$.*

(i) on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge simplement (ou ponctuellement) vers*** *f si*

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \tag{6}$$

(ii) on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge uniformément vers*** *f si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies \left[\ \boxed{\forall x \in X,}\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\ \right] \tag{7}$$

Noter que (6) signifie :

$$\boxed{\forall x \in X,} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

La différence entre (6) et (7), non négligeable, réside dans l'ordre des quantificateurs : dans la convergence simple, N dépend de ε **et** de x, dans la convergence uniforme, N ne dépend que de ε.

Proposition 3.2 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $X \longrightarrow Y$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément *vers une fonction f si et seulement si elle converge vers f pour la distance étendue d_∞, c'est à dire si*

$$\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$$

Démonstration — Exercice. □

Proposition 3.3 (convergence uniforme plus forte que la convergence simple) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit $f : X \longrightarrow Y$ une application et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $f_n : X \longrightarrow Y$. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.*

Démonstration — Exercice. □

Exemple 3.1 (qui montre que la réciproque est fausse) *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'applications $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = g(nx)$. Alors cette suite converge* simplement *vers la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, 0[, \quad & f(x) = -1 \\ & f(0) = 0 \\ \forall x \in]0, +\infty[, \quad & f(x) = 1 \end{aligned}$$

Mais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément *vers f*

Démonstration — Le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converve simplement vers f est simple et est laissé en exercice. Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f, il suffit de vérifier que $d_\infty(f_n, f) = 1$ et donc que la suite ne converge pas vers f dans la norme d_∞. Or cela est une conséquence de :

$$\begin{array}{rcl} d_\infty(f_n, f) & = & \sup\{|f_n(x) - f(x)| \ ; \ x \in]0, +\infty[\} \\ & = & \sup\left\{1 - \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} \ ; \ x \in]0, +\infty[\right\} = 1 \end{array}$$

car $\lim_{x\to 0} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} = 0$.

Théorème 3.1 (de la limite uniforme) *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, soit $f : X \longrightarrow Y$ une application et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications $f_n : X \longrightarrow Y$. Supposons que :*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \longrightarrow Y$ est continue ;

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f

Alors f est continue.

Démonstration — Supposons vérifiées les hypothèses (i) et (ii). Soit $x_0 \in X$, montrons que f est continue en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors, par l'hypothèse (ii), $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Longrightarrow d_\infty(f_n, f) < \varepsilon/3$. Cela implique que, si $n \geq N$,

$$\forall x \in X, \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3$$

Choisissons une valeur de $n \geq N$. Alors, d'après l'hypothèse (i), f_n est continue, donc

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X, \ d_X(x, x_0) < \alpha \implies d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon/3$$

Donc, par l'inégalité triangulaire, $\forall x \in X$, si $d_X(x, x_0) < \alpha$, alors

$$\begin{array}{rcl} d_Y(f(x), f(x_0)) & \leq & d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0)) \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{array}$$

ce qui prouve la continuité de f en x_0. □

L'hypothèse de la convergence uniforme est essentielle. Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans l'exemple 3.1 converge simplement vers f. Chaque fonction f_n est continue mais la limite f ne l'est pas. L'explication est le fait que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément.*

4 Espaces métriques compacts

4.1 Propriété de Borel–Lebesgue

Définition 4.1 *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Un* ***recouvrement de** A **par des ouverts*** *est une famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que A soit contenu dans la réunion de tous ces ouverts :*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$$

*Le recouvrement est dit **fini** si la famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est finie.*

Exemples

- si $X=\mathbb{R}$ et $A=[0,+\infty[$, $(]n-1,n+1[\,)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de A par des ouverts (mais $\left(]n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}[\,\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas un recouvrement de A !). Ce recouvrement n'est pas fini.
- si $X=\mathbb{R}$ et $A=[0,1]$, $\left(]-\frac{1}{2},\frac{3}{4}[,]\frac{1}{4},\frac{3}{2}[\right)$ est un recouvrement fini de A par des ouverts.

Définition 4.2 *Soit (X,d) un espace métrique et $A\subset X$. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement de A. Un **sous-recouvrement** de A extrait de $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in J}$, telle que $J\subset I$ et*

$$A\subset\bigcup_{i\in J}\mathcal{O}_i$$

Définition 4.3 (Propriété de Borel–Lebesgue) *Soit (X,d) un espace métrique et $K\subset X$. On dit que K est **compact** (ou satisfait la propriété de* Borel–Lebesgue*) si, de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

De façon plus détaillée, K est compact si, pour tout recouvrement de K par des ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$, il existe un sous-ensemble **fini** $J\subset I$ tel que $(\mathcal{O}_i)_{i\in J}$ soit encore un recouvrement de K.

Topologie

Cours de L3 par Frédéric Hélein[1], octobre–décembre 2024

Mercredi 13 novembre 2024

Rappelons la définition suivante :

Définition 4.3 (Propriété de Borel–Lebesgue) *Soit (X,d) un espace métrique et $K \subset X$. On dit que K est* ***compact*** *(ou satisfait la propriété de* Borel–Lebesgue*) si, de tout recouvrement de K par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

De façon plus détaillée, K est compact si, pour tout recouvrement de K par des ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$, il existe un sous-ensemble **fini** $J \subset I$ tel que $(\mathcal{O}_i)_{i\in J}$ soit encore un recouvrement de K.

La notion de compact est intrinsèque, comme le stipule le résultat suivant.

Proposition 4.1 *Soit (X,d) un espace métrique et $K \subset X$. Soit τ la topologie induite par d sur X et τ_K la topologie induite par τ sur K. Alors K est compact pour la topologie τ si et seulement si il est compact pour la topologie τ_K.*

Démonstration — Immédiate. □

4.2 Compacité et parties fermées ou bornées

Proposition 4.2 *Soit (X,d) un espace métrique. Tout ensemble compact dans X est fermé et borné.*

Démonstration — Soit $K \subset X$ un compact et soit $p \in X$ un point quelconque. Considérons la famille (infinie dénombrable en général) $(B_d(p,n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Elle recouvre tout X, donc, *a fortiori*, K. Nous pouvons extraire de cette famille une famille finie $(B_d(p,\varphi(j)))_{j\in[\![1,N]\!]}$ qui recouvre K et où[2] $\varphi : [\![1,N]\!] \longrightarrow \mathbb{N}^*$ peut, sans perte de généralité, être choisie strictement croissante. Donc

$$K \subset \bigcup_{j\in[\![1,N]\!]} B_d(p,\varphi(j)) = B_d(p,\varphi(N))$$

donc K est borné.

Montrons que K est fermé, ce qui revient à démontrer que son complémentaire $X \setminus K$ est ouvert. Soit $a \in X \setminus K$. Pour tout point $x \in K$, $a \neq x$ et donc $d(a,x) > 0$. Posons $r_x := d(a,x)/2$, alors $B_d(a,r_x) \cap B_d(x,r_x) = \emptyset$. Mais de plus K est recouvert par la famille

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr
2. Nous notons $[\![1,N]\!] := \mathbb{N} \cap [1,N]$

$(B_d(x,r_x))_{x\in K}$: comme K est compact, on peut extraire un recouvrement $\left(B_d(x_j,r_{x_j})\right)_{j\in J}$, où J est fini. Soit $r := \inf\{r_{x_j}\,;\, j\in J\} > 0$. Alors

$$\begin{array}{rcl}\forall j\in J, \quad r\leq r_{x_j} & \Longrightarrow & B_d(a,r)\subset B_d(a,r_{x_j}) \\ & \Longrightarrow & B_d(x,r_{x_j})\cap B_d(a,r)\subset B_d(x,r_{x_j})\cap B_d(a,r_{x_j}) = \emptyset\end{array}$$

Donc

$$K\cap B_d(a,r)\subset \bigcup_{j\in J}\left(B_d(x,r_{x_j})\cap B_d(a,r)\right) = \bigcup_{j\in J}\emptyset = \emptyset$$

ce qui signifie que $B_d(a,r)\subset X\setminus K$. □

Proposition 4.3 *Soit (X,d) un espace métrique et soit $K\subset X$ un compact. Alors toute partie fermée F de K est compacte.*

Démonstration — Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement de F par des ouverts. Par commodité nous supposerons que $0\notin I$. Notons $\mathcal{O}_0 := X\setminus F$: par hypothèse $\mathcal{O}_0$ est ouvert. Considérons la famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I^+}$, où $I^+ := I\cup\{0\}$. Alors $(\mathcal{O}_i)_{i\in I^+}$ est un recouvrement de X. Comme K est compact on peut extraire un sous-recouvrement fini $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$ (où $J\subset I^+$ est *fini*) qui recouvre K, donc F. Nous obtenons ainsi un recouvrement de F par une famille finie d'ouverts, *extraite de* $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$, soit en prenant $(\mathcal{O}_j)_{j\in J}$, si $0\notin J$, soit en prenant $(\mathcal{O}_j)_{j\in J\setminus\{0\}}$, si $0\in J$. Donc F est compact. □

Remarque 4.1 *En général la réciproque aux deux propositions précédentes n'est pas vraie, ce qui signifie qu'il existe des espaces métriques fermés et bornés mais non compacts. Un exemple est le suivant. Considérons l'espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur réelle, muni de la norme $\|u\| := \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$. Alors la boule unité fermée $\widetilde{B}_\infty(0,1)$ dans $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est fermée et bornée, mais n'est pas compacte. En effet il existe des suites à valeur dans $\widetilde{B}_\infty(0,1)$ dont il est impossible d'extraire une sous-suite convergente (ce qui signifie que $\widetilde{B}_\infty(0,1)$ n'est pas séquentiellement compact, notion qui sera introduite dans la définition 4.1 au prochain cours, et donc est non compact, d'après le théorème 4.3). Un exemple est la suite $(u(k))_{k\in\mathbb{N}}$ (à valeur dans $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$!) définie par : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u(k)_n = 1$ si $k=n$ et $u(k)_n=0$ si $k\neq n$ est à valeur dans $\widetilde{B}_\infty(0,1)$.*

4.3 Les compacts de $\mathbb{R}$

En fait les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$, comme le montrent la proposition 4.2 qui précède et le théorème 4.1 qui suit.

Théorème 4.1 *Toute partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ est compacte pour la topologie standard.*

Démonstration — *Étape 0* — En préliminaire observons que, dans n'importe quel espace métrique (X,d), si A et B sont deux parties de X et si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $A\cup B$ dont il existe un sous-recouvrement *fini* $(\mathcal{O}_i)_{i\in I_A}$ de A et un sous recouvrement *fini* $(\mathcal{O}_i)_{i\in I_B}$ de B, alors il est possible d'extraire de $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un sous recouvrement *fini* de $A\cup B$: il suffit de prendre $(\mathcal{O}_i)_{i\in I_A\cup I_B}$.

En prenant la contraposée de cette assertion, on obtient que, si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $A\cup B$ qui *n'admet pas* de sous recouvrement fini de $A\cup B$, alors,

— soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ n'admet pas de sous recouvrement fini de A (nous dirons alors dans l'étape suivante que A est « *fautif* »),

— soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ n'admet pas de sous recouvrement fini de B (nous dirons alors dans l'étape suivante que B est « *fautif* »),.

Étape 1 — Nous montrons que, pour tout $L\in]0,+\infty[$, $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ est compact. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ par des ouverts, raisonnons par l'absurde et supposons que ce recouvrement n'admet pas de sous-recouvrement fini de $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$. Alors, d'après ce qui précède et puisque $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]=[-\frac{L}{2},0]\cup[0,\frac{L}{2}]$, au moins un des deux intervalles $[-\frac{L}{2},0]$ ou $[0,\frac{L}{2}]$ est *fautif*.

Notons $A_0=[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ et, si $[-\frac{L}{2},0]$ est *fautif*, notons $A_1=[-\frac{L}{2},0]$, sinon $A_1=[0,\frac{L}{2}]$. Dans tous les cas A_0 et A_1 sont *fautifs*. Nous pouvons continuer ce raisonnement indéfiniment : nous obtenons une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles fermés fautifs en divisant chaque intervalle A_n en deux et en choisissant pour A_{n+1} un intervalle fautif qu'il contient. Notons $A_n=[a_n,b_n]$. Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et $b_n-a_n=\frac{L}{2^n}$. Ces suites sont donc ajacentes et convergent vers une même limite ℓ.

Comme $\ell\in[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$, il existe $i\in I$ tel que $\ell\in\mathcal{O}_i$ et, puisque $\mathcal{O}_i$ est ouvert, il existe $\varepsilon>0$ tel que $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[\subset\mathcal{O}_i$. En choisissant $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{L}{2^n}<\varepsilon$, on a donc $[\ell-\frac{L}{2^n},\ell+\frac{L}{2^n}]\subset\mathcal{O}_i$. Mais par ailleurs $\ell\in[a_n,b_n]$, ce qui entraîne $|\ell-a_n|\leq\frac{L}{2^n}$ et $|\ell-b_n|\leq\frac{L}{2^n}$. Donc $a_n,b_n\in[\ell-\frac{L}{2^n},\ell+\frac{L}{2^n}]$, ce qui entraîne que $A_n=[a_n,b_n]\subset[\ell-\frac{L}{2^n},\ell+\frac{L}{2^n}]\subset\mathcal{O}_i$. Mais cela contredit le fait que l'intervalle A_n est fautif.

Étape 2 — Soit F une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$. Alors il existe $L>0$ tel que $F\subset[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$. Alors, d'après la proposition 4.3, F est fermé. □

4.4 Compacts et continuité

Proposition 4.4 *Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques et $f:(X,d_X)\Longrightarrow(Y,d_Y)$ une application continue. Alors l'image par f de tout compact $K\subset X$ est un compact de Y.*

Démonstration — Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(K)$ par des ouverts de Y. Comme f est continue, chaque image inverse $f^{-1}(U_i)$ est un ouvert de X. De plus

$$K\subset f^{-1}(f(K))\subset f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(U_i)$$

Comme K est compact, nous pouvons extraire une famille finie $(U_j)_{j\in J}$ telle que $K\subset\bigcup_{j\in J}f^{-1}(U_j)$, ce qui entraîne $f(K)\subset\bigcup_{j\in J}U_j$. □

Théorème 4.2 (théorème de Heine) *Toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue.*

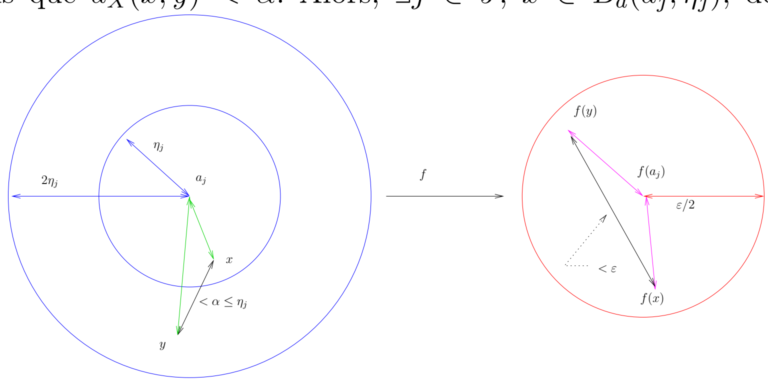
Démonstration — Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ continue. Fixons $\varepsilon > 0$ et cherchons à montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \quad d_X(x, y) < \alpha \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

L'hypothèse de continuité se traduit par :

$$\forall a \in X, \exists \eta(a) > 0, \forall x \in X, \quad x \in B_d(a, 2\eta(a)) \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$$

La famille $(B_d(a, \eta(a)))_{a \in X}$ recouvre X, donc, puisque X est compact, nous pouvons extraire une famille finie $(B_d(a_j, \eta_j))_{j \in J}$ (où $\eta_j := \eta(a_j)$) qui recouvre X. Posons $\alpha := \inf\{\eta_j \ ; \ j \in J\} > 0$.
Soient $x, y \in X$ tels que $d_X(x, y) < \alpha$. Alors, $\exists j \in J$, $x \in B_d(a_j, \eta_j)$, donc, puisque

$d_X(x, y) < \alpha \leq \eta_j$, 

$$d_X(x, a_j) < \eta_j \implies \begin{cases} d_X(x, a_j) < 2\eta_j & \implies d_Y(f(x), f(a_j)) < \varepsilon/2 \\ d_X(y, a_j) \leq d_X(y, x) + d_X(x, a_j) < 2\eta_j & \implies d_Y(f(y), f(a_j)) < \varepsilon/2 \end{cases}$$

et alors $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(a_j)) + d_Y(f(a_j), f(y)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, ce qui prouve le résultat. $\square$

4.5 Propriété de Bolzano–Weierstrass

Définition 4.4 *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est **séquentiellement compact** ou qu'il possède la propriété de **Bolzano–Weierstrass** si toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans X admet une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans (X, d).*

Nous allons voir que, *pour un espace métrique*, la propriété de Bolzano–Weierstrass est *équivalente* à la propriété de Borel–Lebesgue. Elle constitue donc une autre caractérisation des espaces métriques compacts.

Définition 4.5 *Soit (X, d) un espace métrique. Une **famille dénombrable de fermés emboîtés non vides de** X est une famille dénombrable $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés non vides de (X, d) telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1} \subset F_n$$

Proposition 4.5 *Soit (X, d) un espace métrique* ***compact****. Alors l'intersection de toute famille dénombrable de fermés emboîtés non vides est non vide.*

Démonstration — Raisonnons par l'absurde. Supposons que (X, d) est un espace métrique compact et qu'il existe une suite dénombrable $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés emboîtés non vides dans (X, d) telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n := X \setminus F_n$. Alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts de (X, d) qui satisfait $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_n) = X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$, c'est à dire un recouvrement de X. Comme X est compact nous pouvons extraire une famille finie $\left(U_{\varphi(j)}\right)_{j\in[\![1,N]\!]}$ qui recouvre X. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que φ est croissante, si bien que $F_{\varphi(N)} \subset F_{\varphi(N-1)} \subset \cdots \subset F_{\varphi(1)}$ et donc $U_{\varphi(1)} \subset \cdots \subset U_{\varphi(N-1)} \subset U_{\varphi(N)}$. Cela entraîne

$$X \subset \bigcup_{j\in[\![1,N]\!]} U_{\varphi(j)} = U_{\varphi(N)} \quad \Longrightarrow \quad F_{\varphi(N)} = X \setminus U_{\varphi(N)} = \emptyset$$

ce qui constitue une contradiction. □

Théorème 4.3 *Tout espace métrique est compact si et seulement si il est séquentiellement compact. Autrement dit :*

(i) la propriété de Borel–Lebesgue *entraîne la propriété de* Bolzano–Weierstrass

(ii) la propriété de Bolzano–Weierstrass *entraîne la propriété de* Bolzano–Weierstrass*.*

Nous commençons par démontrer (i).
Démonstration (compact $\Longrightarrow$ séquentiellement compact) — Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n := \{x_m\,;\, n \leq m\}$ et $F_n := \overline{A_n}$. Alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés non vides emboîtés. Donc, d'après la proposition 4.5, son intersection est non vide. Soit $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, puisque $F_n = \overline{A_n}$, $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ signifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \quad B_d(\ell, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset \tag{1}$$

Nous allons extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. Choisissons n'importe suite[3] $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

— nous choisissons $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\varphi(0)} \in B_d(\ell, \varepsilon_0)$;

— puis $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $x_{\varphi(1)} \in B_d(\ell, \varepsilon_1)$,

— $\ldots$

— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous prenons $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ et $x_{\varphi(n)} \in B_d(\ell, \varepsilon_n)$.

Alors la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, donc $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une sous-suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, \ell) < \varepsilon_n$, ce qui implique que $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. □

La preuve de la propriété (ii) du théorème 4.3 repose sur deux lemmes.

3. Par exemple $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$ fait l'affaire.

Topologie

Cours de L3 par Frédéric Hélein[1], octobre–décembre 2024

Mercredi 20 novembre 2024

Rappelons le résultat :

Théorème 4.3 *Tout espace métrique est compact si et seulement si il est séquentiellement compact. Autrement dit :*

(i) la propriété de Borel–Lebesgue *entraîne la propriété de* Bolzano–Weierstrass

(ii) la propriété de Bolzano–Weierstrass *entraîne la propriété de* Bolzano–Weierstrass.

Nous avons montré (i) à la dernière séance. La preuve de la propriété (ii) du théorème 4.3 repose sur deux lemmes. Le premier lemme affirme que, dans un espace métrique séquentiellement compact, tout recouvrement par des ouverts possède une « granularité » ε strictement positive.

Lemme 4.1 *Soit (X,d) un espace métrique séquentiellement compact. Alors, pour tout recouvrement de X pour des ouverts, $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall x \in X, \exists i(x) \in I, \quad B_d(x,\varepsilon) \subset \mathcal{O}_{i(x)}$$

Démonstration — Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts et raisonnons par l'absurde en supposant que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, \forall i \in I, \quad B_d(x,\varepsilon) \cap (X \setminus \mathcal{O}_i) \neq \emptyset \tag{1}$$

Choisissons une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $]0,+\infty[$ et qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Alors, d'après (1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, \forall i \in I, \quad B_d(x_n,\varepsilon_n) \cap (X \setminus \mathcal{O}_i) \neq \emptyset \tag{2}$$

Comme (X,d) est séquentiellement compact, nous pouvons extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in X$. Comme $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ recouvre X, $\exists j \in I$ tel que $\ell \in \mathcal{O}_j$, et comme $\mathcal{O}_i$ est ouvert, $\exists r > 0$ tel que $B_d(\ell, 2r) \subset \mathcal{O}_j$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$, on sait que, pour n assez grand, $d(x_{\varphi(n)},\ell) < r$. Nous pouvons de plus choisir une valeur de n telle que $\varepsilon_{\varphi(n)} < r$. Alors

$$B_d(x_{\varphi(n)},\varepsilon_{\varphi(n)}) \subset B_d(x_{\varphi(n)},r) \subset B_d(\ell,2r) \ \subset \ \mathcal{O}_j$$

car $y \in B_d(x_{\varphi(n)},r) \Longleftrightarrow d(y,x_{\varphi(n)}) < r \Longrightarrow d(y,\ell) \leq d(y,x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)},\ell) < r + r$. Cela contredit (2). □

Définition 4.3 (ensemble précompact) *Un espace métrique (X,d) est **précompact** si, pour tout $\delta > 0$, il existe un recouvrement **fini** de X par des boules de rayon δ.*

---

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Lemme 4.2 *Tout espace métrique séquentiellement compact est précompact.*

Démonstration — Soit (X,d) est un espace métrique précompact. Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\delta > 0$ tel qu'il n'existe pas de recouvrement fini de X par des boules de taille δ. Prenons un point $x_0 \in X$ quelconque, la boule $B_d(x_0,\delta)$ ne recouvre pas X, donc $\exists x_1 \in X \setminus B_d(x_0,\delta)$. Nous réitérons ce raisonnement en construisant par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : $\forall n \in \mathbb{N}$, puisque $(B_d(x_m,\delta))_{m\in\mathbb{N}\,;\,m\leq n}$ n'est pas un recouvrement de X, il existe $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}\,;\,m\leq n} B_d(x_m,\delta)$. La propriété importante de cette suite est que

$$\forall n,m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m \implies d(x_n,x_m) > \delta$$

Mais puisque (X,d) est séquentiellement compact, il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in X$. En particulier

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} n \geq N \Longrightarrow d(x_{\varphi(n)},\ell) < \delta/2 \\ m \geq N \Longrightarrow d(x_{\varphi(m)},\ell) < \delta/2 \end{array} \right. \Longrightarrow d(x_{\varphi(n)},x_{\varphi(m)}) < \delta$$

ce qui contredit la propriété précédente. □

Nous pouvons enfin montrer que la propriété de *Bolzano–Weierstrass* entraîne la propriété de *Borel–Lebesgue.*
Démonstration du théorème 4.3 (ii) (séquentiellement compact $\Longrightarrow$ compact) — Soit (X,d) un espace métrique séquentiellement compact et soit $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement de X par des ouverts. Alors, d'après le lemme 4.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \exists \alpha(x) \in A, \quad B_d(x,\varepsilon) \subset \mathcal{O}_{\alpha(x)}$$

Nous appliquons alors le lemme 4.2 avec $\delta = \varepsilon$: il existe un recouvrement *fini* $(B_d(x_j,\varepsilon))_{j\in J}$ de X par des boules de rayon ε. D'après la propriété précédente, pour tout $j \in J$, $\exists \alpha(x_j) \in A$, $B_d(x_j,\varepsilon) \subset \mathcal{O}_{\alpha(x_j)}$. Concaténons les inclusions :

$$X \;\subset\; \bigcup_{j\in J} B_d(x_j,\varepsilon) \;\subset\; \bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_{\alpha(x_j)}$$

Donc $\left(\mathcal{O}_{\alpha(x_j)}\right)_{j\in J}$ est un recouvrement fini de X, extrait de $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in A}$. □

4.6 Propriétés des ensemble séquentiellement compacts

Proposition 4.1 *Tout produit cartésien fini d'espaces topologiques est compact ssi chacun de ses facteurs est compact.*

Démonstration — Nous le montrons pour le produit cartésien de deux espaces métriques (X,d_X) et (Y,d_Y). (i) Supposons que $X \times Y$ est compact. Rappelons que les projections $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ et $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ sont continues. Donc, puisque X et Y sont les images de $X \times Y$ par ces projections, X et Y sont compacts.

(ii) Supposons que X et Y sont compacts. Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeur dans $X \times Y$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeur dans X, donc on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans X. Ensuite il est possible d'extraire de la suite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans Y une sous-suite $\left(y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans Y. Alors la sous-suite $\left(x_{\varphi\circ\psi(n)}, y_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $X \times Y$. □

Proposition 4.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute partie fermée bornée de $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ est compacte.*

Démonstration — Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ une partie fermée et bornée. Comme F est bornée, il existe $R > 0$ tel que F soit contenu dans la boule $B_{d_\infty}(0, R) = [-R, R]^n$. D'après le théorème **??**, chaque intervalle $[-R, R]$ est compact, donc d'après la proposition 4.4 qui précède, $[-R, R]^n$ est compact. Comme F est fermé et est contenu dans $[-R, R]^n$, nous pouvons appliquer la proposition 4.3 pour conclure que F est compact. □

Proposition 4.3 (extrema atteints) *Soit (K, d) un espace métrique (non vide !) **compact** et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **continue**. Alors les bornes inférieures et supérieures de f sur K sont atteintes, c'est à dire : $\exists m, M \in K$,*

$$\inf f(K) = f(m), \quad \sup f(K) = f(M)$$

Démonstration — (i) L'existence de $\inf f(K)$ et de $\sup f(K)$ est une conséquence du fait que $f(K)$ est une partie compacte (car image d'un compact par une application continue) et donc bornée non vide de $\mathbb{R}$.

(ii) Montrons l'existence d'une valeur $m \in K$ telle que $\inf f(K) = f(m)$ (la preuve pour $\sup f(K)$ est identique). Une conséquence de la définition de la borne inférieure est que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in K$, $\inf f(K) \leq f(x) \leq \inf f(K) + \varepsilon$. En appliquant cette dernière propriété pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, nous construisons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans K telle que $\inf f(K) \leq f(x_n) \leq \inf f(K) + \frac{1}{n+1}$. Nous en déduisons en particulier que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf f(K)$.

Par ailleurs la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans le compact K, nous pouvons extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $m \in K$. Puisque f est continue, $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(m)$. Donc $f(m) = \inf f(K)$. □

4.7 Application : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, fonctions coercives

Théorème 4.4 *Soit V un espace vectoriel de dimension n. Alors toutes les normes sur V sont Lipschitz équivalentes entre elles.*

Démonstration — Quitte à choisir une base, on peut toujours supposer que $V = \mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$. Il sera suffisant de montrer que toute norme

$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[$ est équivalente à la norme[2] $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Cela revient à montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, N) \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

est bilipschitzienne. Dans un sens, on a, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \leq N(x_1e_1) + \cdots + N(x_ne_n) \\ &= |x_1|N(e_1) + \cdots + |x_n|N(e_n) \leq (N(e_1) + \cdots N(e_n))\|x\|_\infty \end{aligned}$$

c'est à dire $N(x) \leq \Lambda\|x\|_\infty$, avec $\Lambda = N(e_1) + \cdots + N(e_n)$. On déduit aussi que $N : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow [0, +\infty[$ est continue, ce qui nous sera utile dans la suite.

Obtenir une inégalité inverse est plus subtile et c'est là que la compacité vient à notre secours. Considérons la « sphère » $\mathbf{S} := \{x \in \mathbb{R}^n\,; \|x\|_\infty = 1\}$: $\mathbf{S}$ est une partie fermée bornée de $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, donc, par la proposition 4.2, elle est donc compacte pour la topologie induite par $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $\lambda := \inf N(\mathbf{S})$. Alors, comme $\mathbf{S}$ est compact et comme $N : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow [0, +\infty[$ est continue, d'après la proposition 4.3, il existe $a \in \mathbf{S}$ tel que $N(a) = \lambda$. Le point crucial est qu'il est impossible que λ soit nul, car cela signifierait que $N(a) = 0 \iff a = 0$, ce qui contredirait le fait que $\|a\|_\infty = 1$.

Nous pouvons alors conclure : pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (nous excluons le cas trivial où $x = 0$), $x/\|x\|_\infty \in \mathbf{S}$, donc

$$\lambda \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \frac{N(x)}{\|x\|_\infty} \quad \iff \quad \lambda\|x\|_\infty \leq N(x)$$

$\square$

Remarque 4.1 *L'hypothèse que l'espace V est de dimension finie est absolument indispensable dans le théorème 4.4. Ainsi par exemple l'espace vectoriel $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à support compact dans $\mathbb{R}$ peut être muni d'une infinité de normes qui ne sont pas Lipschitz équivalentes entre elles. Pour $p \in [1, +\infty[$, définissons*

$$\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \quad \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

et posons[3] $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Nous allons montrer que, si $p \neq q$, il est impossible de trouver une constante $A > 0$ telle que, $\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\|f\|_p \leq A\|f\|_q$. Pour cela nous raisonnerons par l'absurde.

---

2. Le choix de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est préférable car c'est la norme naturellement définie sur le produit cartésien $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ et nous aurons besoin d'utiliser la proposition 4.1.

3. Exercice : en utilisant les notions sur les compacts vues dans ce cours, montrer que les quantités $\|f\|_p$ sont définies et finies pour toutes les valeurs de $p \in [1, +\infty]$, si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ une fonction non nulle (vous êtes libre de choisir celle que vous préférez) et, pour tout $s > 0$, soit $\varphi_s \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_s(x) = \varphi\,(sx)$$

Alors le changement de variable $y = sx$ donne, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_s(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(sx)|^p dx = \frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(y)|^p dy$$

et donc[4]

$$\|\varphi_s\|_p = s^{-1/p} \|\varphi\|_p$$

Supposons qu'il existe $A > 0$ telle que, $\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\|f\|_p \leq A\|f\|_q$. Alors, en particulier, $\forall s \in]0, +\infty[$,

$$\|\varphi_s\|_p \leq A\|\varphi_s\|_q \iff s^{-1/p}\|\varphi\|_p \leq A s^{-1/q}\|\varphi\|_q \iff s^{\frac{p-q}{pq}} \leq A\frac{\|\varphi\|_q}{\|\varphi\|_p}$$

Or on observe que, si $p > q$, alors $\lim_{s\to+\infty} s^{\frac{p-q}{pq}} = +\infty$ et, si $p < q$, alors $\lim_{s\to 0} s^{\frac{p-q}{pq}} = +\infty$, ce qui contredit l'inégalité que nous avons établie. Donc les normes ne sont pas Lipschitz équivalentes.

On déduit du théorème 4.4 le résultat suivant.

Théorème 4.5 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les parties fermées bornées sont compactes.*

Démonstration — Tout espace vectoriel V de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et, via un isomorphisme, sa norme est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, grâce au théorème 4.4. On peut alors appliquer la proposition 4.2. □

Définition 4.4 *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et f une fonction de V vers $\mathbb{R}$. On dit que f est* ***coercive*** *si*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty \tag{3}$$

Proposition 4.4 *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{C}(V, \mathbb{R})$. Si f est coercive, alors elle atteint son minimum, c'est à dire :*

$$\exists m \in V, \quad f(m) = \inf_{x\in V} f(x)$$

Démonstration — Considérons l'ensemble

$$K = \{x \in V\,;\, f(x) \leq f(0)\}$$

Alors

4. Pour $p = +\infty$, il est immédiat que $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi_s\|_\infty$.

— K est fermé, car image inverse par l'application continue f du fermé $]-\infty, f(0)]$;
— K est borné, car $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$;
— K est non vide car $0 \in K$.

Donc, par le théorème 4.5, K est un compact non vide et, puisque f est continue, nous pouvons appliquer la proposition 4.3 : $\exists m \in K$, $f(m) = \inf_{x\in K} f(z)$. En fait on a aussi $f(m) = \inf_{x\in V} f(z)$ car, $\forall x \in V \setminus K$, $f(m) \le \inf_{x\in K} f(x) \le f(0) < f(x)$. $\square$

Topologie

Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], octobre–décembre 2024

Mercredi 27 novembre 2024

4.8 Application : le théorème de d'Alembert–Gauss

Théorème 4.3 (d'Alembert–Gauss) *Tout polynôme à coefficients complexes non constant admet une racine dans* $\mathbb{C}$.

Corollaire 4.1 *Tout polynôme* P *à coefficients complexes non constant est égal à un produit de polynômes du premier degré : si* n *est le degré de* P*, alors* $\exists c \in \mathbb{C}^*$ *et* $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *tels que,* $\forall z \in \mathbb{C}$*,* $P(z) = c(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$.

La preuve du corollaire s'obtient par une récurrence immédiate en n étapes, en utilisant le théorème 4.3 et en effectuant une division euclidienne de polynômes à chaque étape.
Démonstration du Théorème 4.3 — Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ non constant. La stratégie repose sur deux idées :

- une première idée est que toute racine λ de P est un point de $\mathbb{C}$ en lequel la fonction $z \longmapsto |P(z)|$ atteint son minimum (puisque $|P(z)| \geq 0$ partout). Il s'agit donc de prouver l'existence d'au moins une valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $P(\lambda) = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$, ce qui semble « raisonnable » à partir du moment où on réalise que $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$.
- Une deuxième idée est que, si λ est un point où $|P|$ atteint son minimum, alors on peut montrer par l'absurde que $P(\lambda) = 0$. Imaginons par exemple (et pour prendre une situation simple) que $\lambda = 0$, $P(\lambda) = 1$ et que $P(z) = 1 + z + \mathcal{O}(z^2)$ au voisinage de 0. Alors pour une valeur $z = -\varepsilon$, avec $\varepsilon \in]0, +\infty[$, on aurait $P(-\varepsilon) = 1 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Il est donc facile d'en déduire que $|P(-\varepsilon)| < 1$ pour ε suffisamment petit, ce qui constitue une contradiction.

La deuxième idée peut facilement être mise en place dans le cas général. La première, en revanche, nécessite d'utiliser une propriété de compacité, à savoir la proposition **??**.

Étape 1 : existence d'un minimum pour $z \longmapsto |P(z)|$ — Soit $n \geq 1$ le degré de P, alors $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, avec $a_n \neq 0$ et donc $P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)$, d'où l'on déduit que $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, c'est à dire, $|P|$ est coercive. Comme $|P|$ est continue, nous déduisons de la Proposition **??** que : $\exists \lambda \in K$, $|P(\lambda)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$.

Étape 2 : $P(\lambda) = 0$ — Nous le montrons par l'absurde en supposant que $P(\lambda) \neq 0$. Considérons le polynôme $Q(z) := (P(\lambda + z) - P(\lambda))/P(\lambda)$. Ce polynôme est non constant car nous avons supposé P non constant. Il admet donc un développement de Taylor en 0 de la forme $Q(z) = \alpha z^k + \mathcal{O}(z^{k+1})$, où $1 \leq k \leq n$ et $\alpha \neq 0$. Posons $\alpha = \rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors si nous choisissons $z = \varepsilon e^{i(\pi-\theta)/k}$, avec $\varepsilon > 0$, nous avons $Q(z) = -\rho\varepsilon^k + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1})$, ce qui entraîne que $|1 + Q(z)| < 1$ si ε est suffisamment petit, ce qui équivaut à $\frac{|P(\lambda+z)|}{|P(\lambda)|} < 1$. Cela est une contradiction. □

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

5 Espaces métriques complets

5.1 Suites de Cauchy

Définition 5.1 *Soit (X,d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* ***suite de Cauchy*** *si*

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\in\mathbb{N}, \quad [\ n\geq N \text{ et } m\geq N\ ] \quad\Longrightarrow\quad d(x_n,x_m)<\varepsilon \tag{1}$$

Quelques exemples :
- la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est une suite de Cauchy (elle converge vers 0) ;
- la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, n'est pas de Cauchy (elle ne converge pas) ;
- la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$ est à valeur dans $\mathbb{Q}$. Elle est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, elle converge dans $\mathbb{R}$ et sa limite[2] est $\sqrt{2}$.

Proposition 5.1 *Soit (X,d) un espace métrique, alors*
- *(i) toute suite convergente dans (X,d) est une suite de Cauchy ;*
- *(ii) toute suite de Cauchy dans (X,d) est bornée ;*

Démonstration — *Preuve de (i)* : supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, c'est à dire :

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, \quad n\geq N \quad\Longrightarrow\quad d(x_n,\ell)<\varepsilon$$

alors, $\forall n,m\in\mathbb{N}$, si $n\geq N$ et $m\geq N$, alors

$$d(x_n,x_m)\leq d(x_n,\ell)+d(\ell,x_m)\leq\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

ce qui prouve que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Preuve de (ii) : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X,d). Appliquons (1) pour $\varepsilon=1$: $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $n,m\geq N\Longrightarrow d(x_n,x_m)<1$. En particulier, si $n\geq N$, alors $d(x_n,x_N)<1$. Par ailleurs l'ensemble de réels positifs $\{d(x_0,x_N),d(x_1,x_N),\cdots,d(x_{N-1},x_N)\}$ est fini donc borné, par une constante $R>0$. On conclut donc que la suite prend ses valeurs dans la boule $\widetilde{B}_d(x_N,\max(1,R))$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. □

Théorème 5.1 *Soit (X,d) un espace métrique, alors toute suite de Cauchy dans (X,d) qui admet une valeur d'adhérence est convergente et converge vers la valeur d'adhérence.*

---

2. Rappelons comment on montre que cette suite converge vers $\sqrt{2}$. D'abord, par un raisonnement par récurrence immédiat on voit que x_n prend des valeurs positives. Ensuite : (a) l'identité $(x_{n+1})^2-2=\frac{1}{4}\left(x_n-\frac{2}{x_n}\right)^2\geq 0$ implique que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(x_n)^2\geq 2$, donc la suite est *minorée* ; (b) l'identité $x_{n+1}-x_n=\frac{2-(x_n)^2}{2x_n}$ entraîne alors que la suite est *décroissante*, donc convergente ; (c) en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient que $\ell=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{2}{\ell}\right)$, d'où l'on déduit que $\ell=\sqrt{2}$.

Démonstration — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (X,d) et supposons que cette suite admette la valeur d'adhérence ℓ, c'est à dire qu'il existe une sous-suite[3] $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ :

$$\forall\varepsilon>0,\exists P\in\mathbb{N},\forall p\in\mathbb{N},\quad p\geq P \quad\Longrightarrow\quad d(x_{\varphi(p)},\ell)<\varepsilon$$

L'hypothèse que la suite est de Cauchy signifie que :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n,m\in\mathbb{N},\quad [\ n\geq N \text{ et } m\geq N\ ] \quad\Longrightarrow\quad d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

Comme $\lim_{p\to+\infty}\varphi(p)=+\infty$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $p\geq P$ et $\varphi(p)\geq N$. Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \left.\begin{array}{r} n\geq N\\ \varphi(p)\geq N\end{array}\right\}\Longrightarrow\quad d(x_n,x_{\varphi(p)})<\varepsilon$$

Mais comme $p\geq P$, on a aussi $d(x_{\varphi(p)},\ell)<\varepsilon$ et donc

$$d(x_n,\ell)\leq d(x_n,x_{\varphi(p)})+d(x_{\varphi(p)},\ell)<2\varepsilon$$

□

5.2 Espace complet

Définition 5.2 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que (X,d) est* ***complet*** *si* toute suite de Cauchy à valeurs dans X converge dans (X,d).

Proposition 5.2 *Soit (X,d) un espace métrique et soit $Y\subset X$ une partie de X, alors*

(i) si Y est complet pour la topologie induite, alors il est fermé dans X ;

(ii) si X est complet et Y est fermé, alors Y est complet.

Démonstration — *Preuve de (i)* : supposons que Y est complet et montrons que $\overline{Y}\subset Y$. Soit $a\in\overline{Y}$, alors il existe une suite à valeurs dans Y qui converge dans (X,d) vers a. D'après la proposition 5.1, cette suite est une suite de Cauchy dans (X,d), donc aussi dans $(Y,d|_Y)$. Comme Y est complet cette suite converge dans $(Y,d|_Y)$ vers une limite qui, par unicité de la limite, est forcément égale à a. Donc $a\in Y$.

Preuve de (ii) : supposons que X est complet et que Y est fermé dans Y. Alors toute suite de Cauchy à valeurs dans Y est aussi une suite de Cauchy à valeur dans X, donc convergente dans (X,d), puisque (X,d) est complet. Comme Y est fermé, sa limite est dans Y. □

Proposition 5.3 *Le produit cartésien de deux espaces métriques est complet si et seulement si les deux espaces métriques qui constituent ce produit sont complets.*

Démonstration — Exercice. □

3. Rappelons qu'ici $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

5.3 Compacité et complétude

Proposition 5.4 *Tout espace métrique compact est complet.*

Démonstration — Il s'agit d'un corollaire du théorème 5.1. Toute suite dans un espace compact admet une valeur d'adhérence. Si, de surcroît, elle est de Cauchy, alors elle converge d'après ce corollaire. □

Proposition 5.5 *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Démonstration — Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Toute suite de Cauchy dans cet espace est bornée d'après le (ii) de la proposition 5.1, donc elle prend ses valeurs dans une boule fermée de E. Une telle boule est compacte d'après le théorème **??**, donc la suite admet une valeur d'adhérence. Cela entraîne que la suite converge d'après le théorème 5.1. □

Remarque 5.1 *La propriété de complétude n'est pas préservée par homéomorphisme. Ainsi par exemple, d'après la proposition précédente 5.5, $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est complet, tandis $]-1,1[$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$ n'est pas complet (si c'était le cas, cela contredirait le (i) de la proposition 5.2). Cependant les deux espaces sont homéomorphes via, par exemple, l'application $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in]-1,1[$.*

Remarque 5.2 *La proposition 5.5 ne se généralise pas en dimension infinie. Ainsi par exemple l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|dx$ n'est pas complet. En effet la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = -1$ si $x \in [-1, -\frac{1}{n}[$, $f_n(x) = nx$ si $x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 1$ si $x \in]\frac{1}{n}, 1]$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, mais elle ne converge pas dans $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.*

La réciproque de la proposition 5.5 n'est pas vraie en général, sauf si on ajoute une hypothèse supplémentaire comme suit. Au préalable, rappelons la définition **??** : un espace métrique (X,d) est dit **précompact** si, pour $r > 0$, il existe un recouvrement **fini** de X par des boules de rayon r.

Proposition 5.6 *Tout espace métrique complet et précompact est compact.*

Démonstration — Soit (X,d) un espace métrique complet et précompact. Nous allons montrer qu'il satisfait la propriété de Bolzano–Weierstrass. Considérons une suite à valeurs dans X, que nous noterons par commodité $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ (où $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$). Commençons par utiliser la précompacité de X (nous observons que, puisque (X,d) est précompact, toute partie de X est également précompact) :

— soit $(B_{1,i})_{1\leq i\leq I_0}$ un recouvrement de X par un nombre fini (égal à $I_0 \in \mathbb{N}$) de boules de rayon 1. Comme
$$\mathbb{N} = f^{-1}(X) \subset \bigcup_{1\leq i\leq I_0} f^{-1}(B_{1,i})$$
il existe $i_0 \in [\![1, I_0]\!]$ tel que $f^{-1}(B_{1,i_0})$ soit une partie infinie de $\mathbb{N}$. Notons $A_0 := B_{1,i_0}$.

— Nous pouvons recouvrir A_0 par une collection finie $\left(B_{1/2,i}\right)_{1\leq i\leq I_1}$ de boules de rayon 1/2. À nouveau

$$f^{-1}(A_0) \subset \bigcup_{1\leq i\leq I_1} f^{-1}\left(B_{1/2,i}\cap A_0\right)$$

et donc il existe $i_1 \in [\![1, I_1]\!]$ tel que $f^{-1}\left(B_{1/2,i_1}\cap A_0\right)$ soit une partie infinie de $\mathbb{N}$. Notons $A_1 := B_{1/2,i_1}\cap A_0$.

— Nous construisons ainsi par récurrence une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de X telle que, $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^{-1}(A_k)$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, comme suit : pour tout $k\in\mathbb{N}$, nous pouvons recouvrir A_k par une collection finie $\left(B_{1/2^{k+1},i}\right)_{1\leq i\leq I_{k+1}}$ de boules de rayon $1/2^{k+1}$, nous déduisons qu'il existe $i_{k+1}\in [\![1, I_{k+1}]\!]$ tel que $f^{-1}\left(B_{1/2^{k+1},i_{k+1}}\cap A_k\right)$ soit une partie infinie de $\mathbb{N}$ et nous posons $A_{k+1} := B_{1/2^{k+1},i_{k+1}}\cap A_k$.

Nous remarquons que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est emboîtée ($\forall k\in\mathbb{N}$, $A_{k+1}\subset A_k$) et que chaque A_k est contenu dans une boule de rayon $1/2^k$.

Il est alors possible de construire une suite $(\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ en choisissant $\varphi(0)\in f^{-1}(A_0)$, puis, pour tout $k\in\mathbb{N}$, en prenant $\varphi(k+1)>\varphi(k)$ tel que $\varphi(k+1)\in f^{-1}(A_{k+1})$. Alors la sous-suite $(f(\varphi(k)))_{k\in\mathbb{N}}$ possède la propriété que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall n,m\in\mathbb{N},\quad n,m\geq k \implies f(\varphi(n)), f(\varphi(m))\in A_k\subset B_{1/2^k,i_k}$$

ce qui entraîne que $d(f(\varphi(n)), f(\varphi(m))) < 1/2^{k-1}$. La suite $(f(\varphi(k)))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy et, puisque (X,d) est complet, elle converge. Cela prouve que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Si à présent nous supposons que $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy (nous n'avons pas eu besoin de cette hypothèse jusqu'à présent !), nous déduisons du théorème 5.1 que cette suite converge. □

5.4 Théorème de point fixe de Banach–Picard

5.5 Le théorème

Théorème 5.2 *Soit (X,d) un* ***espace métrique complet*** *et soit $f: X\longrightarrow X$ une application lipschitzienne. Supposons que la constante de Lipschitz k de f soit* ***strictement plus petite que*** *1. Alors l'application f admet un unique point fixe dans X, c'est à dire :*

$$\exists! p\in X,\quad f(p)=p \tag{2}$$

De plus, pour tout $a\in X$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=a$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ converge vers p.

Démonstration — L'unicité de la solution de (2) est immédiate : supposons que p_1 et p_2 soient deux solutions de (2), alors, puisque $0<k<1$,

$$d(p_1,p_2) = d(f(p_1), f(p_2)) \leq k d(p_1,p_2) \quad\implies\quad (1-k)d(p_1,p_2)\leq 0$$

et donc $d(p_1, p_2) = 0$, ce qui entraîne $p_1 = p_2$.

L'idée de la démonstration de l'existence d'une solution est dans l'énoncé : nous choisissons un point quelconque $a \in X$ et nous considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Nous observons alors que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq kd(x_n, x_{n+1})$$

et donc, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$. Cela entraîne que, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, en supposant par exemple que $n < m$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} d(x_{n+j}, x_{n+1+j}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{m-n-1} k^{n+j} \\ &= d(x_0, x_1) \frac{k^n(1-k^{m-n})}{1-k} \leq d(x_0, x_1) \frac{k^n}{1-k} \end{aligned}$$

Comme $k < 1$, $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$, on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Nous pouvons maintenant utiliser le fait que (X, d) est complet pour conclure que cette suite converge vers une limite ℓ.

Il ne reste plus qu'à passer à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$: comme f est continue (puisque lipschitzienne), cela nous donne $\ell = f(\ell)$. □

Ce résultat admet un nombre incalculable d'applications en analyse des équations différentielles (et pas seulement), afin notamment de montrer l'existence locale (en temps ou en espace) de solutions à ces équations.

5.6 Prolongement d'applications uniformément continues

Étant donnés deux ensembles X et Y et $D \subset X$, une partie de X, si $f : D \longrightarrow Y$ est une application, une application $F : X \longrightarrow Y$ est appelée une **extension de** f si $F|_D = f$.

Théorème 5.3 *Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et soit $D \subset X$ une partie* ***dense*** *dans (X, d_X). Soit $f : D \longrightarrow Y$ une application* ***uniformément continue****, alors, si (Y, d_Y)* ***est complet****, il existe une unique extension F de f qui est continue de (X, d_X) vers (Y, d_Y). De surcroît F est uniformément continue.*

Démonstration — (i) Montrons d'abord que l'unicité de l'extension résulte de la densité de D et de la continuité de f. Soit $F : X \longrightarrow Y$ et $G : X \longrightarrow Y$ deux extensions continues de f. Comme D est dense dans X, pour tout point $a \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D telle que $\lim_{n\to+\infty} = a$. Puisque F et G sont continues,

$$F(a) = \lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} G(x_n) = G(a)$$

donc $F = G$.

(ii) Montrons à présent l'existence de F. Pour toute valeur $a \in X$, considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite à valeur dans D qui converge vers a. Nous pouvons alors montrer que la suite image $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (Y, d_Y). En effet, puisque f est *uniformément* continue,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, x' \in X, \quad d_X(x, x') < \alpha \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

et, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_X) (puisqu'elle est convergente),

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq N \implies d_X(x_n, x_m) < \alpha$$

et donc, $n, m \geq N \implies d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Donc, comme (Y, d_Y) est complet, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in Y$.

Nous sommes tentés de conclure tout de suite en posant $F(a) := \ell$. Mais avant de pouvoir le faire, nous devons vérifier que la limite ℓ ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais seulement de a ! Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient deux suites qui convergent vers a et notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n)$. Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \left| \begin{array}{l} x_p \text{ si } n = 2p \\ x'_p \text{ si } n = 2p+1 \end{array} \right.$$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers a dans (X, d_X) et donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers une limite σ dans (Y, d_Y). Or $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$, donc elles convergent vers σ. Donc $\ell = \sigma = \ell'$ et nous avons le droit de poser $F(a) := \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$. Ainsi l'application $F : X \longrightarrow Y$ est bien définie.

(iii) Terminons en montrant que F est uniformément continue. Nous devons montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, $\forall a, a' \in X$, $d_X(a, a') < \alpha \implies d_Y(F(a), F(a')) < \varepsilon$. Puisque f est uniformément continue, $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in D, \quad d_X(x, x') < 3\alpha \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon/3$$

Soit a et $a' \in X$ tels que $d_X(a, a') < \alpha$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans D telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} x'_n = a'$. Nous choisissons n suffisamment grand pour que

$$\left\{ \begin{array}{l} d_X(x_n, a) < \alpha \\ d_X(x'_n, a') < \alpha \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d_Y(f(x_n), F(a)) < \varepsilon/3 \\ d_X(f(x'_n), F(a')) < \varepsilon/3 \end{array} \right.$$

Alors

$$d_X(x_n, x'_n) \leq d_X(x_n, a) + d_X(a, a') + d_X(x'_n, a') < 3\alpha \implies d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon/3$$

et donc

$$d_Y(F(a), F(a')) \leq d_Y(F(a), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(x'_n)) + d_Y(f(x'_n), F(a')) < \varepsilon$$

Donc F est uniformément continue. □

5.7 Espaces de Banach

Définition 5.3 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 5.4 *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans V. On dit que*

— *la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est **convergente** si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(V, \|\cdot\|)$.*

— *la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est **absolument convergente** si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{j=0}^{n} \|x_j\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 5.7 *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Toute série absolument convergente dans $(V, \|\cdot\|)$ est convergente dans $(V, \|\cdot\|)$.*

Démonstration — Soit $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ une série absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $s_n := \sum_{j=0}^{n} x_j$ et $\sigma_n := \sum_{j=0}^{n} \|x_j\|$. Pour n et $m \in \mathbb{R}$ tels que $n \leq m$,

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| = \sigma_m - \sigma_n$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est absolument convergente, la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est donc de Cauchy. L'inégalité précédente entraîne donc que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme $(V, \|\cdot\|)$ est complet, cette suite converge. $\square$

Noter que la réciproque est fausse : par exemple la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument dans $\mathbb{R}$. En revanche nous avons le résultat suivant.

Proposition 5.8 *Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Supposons que tout série absolument convergente dans $(V, \|\cdot\|)$ soit convergente. Alors $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.*

Démonstration — Soit $(V, \|\cdot\|)$ satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(V, \|\cdot\|)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, appliquons la propriété de Cauchy avec $\varepsilon = 1/2^{k+1}$:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists N_k \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq N_k \implies \|x_m - x_n\| < 1/2^{k+1}$$

Nous construisons une nouvelle suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans V comme suit :

— $y_0 := x_{\varphi(0)}$, où $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ est tel que $\varphi(0) \geq N_0$

— $y_1 := x_{\varphi(1)} - x_{\varphi(0)}$, où $\varphi(1) \in \mathbb{N}$ est tel que $\varphi(1) \geq \max(N_1, \varphi(0) + 1)$

— $\cdots$

— $y_n := x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n-1)}$, où $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ est tel que $\varphi(n) \geq \max(N_n, \varphi(n-1) + 1)$

Nous observons alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) > \varphi(n-1) \geq N_{n-1}$ et donc $\|y_n\| = \|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n-1)}\| < 1/2^n$. Donc puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$ converge, on en déduit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ est absolument convergente dans $(V, \|\cdot\|)$. Donc elle converge d'après les hypothèses.

Par ailleurs il est immédiat que $\sum_{j=0}^{n} y_j = x_{\varphi(n+1)}$, ce qui signifie que la suite des sommes partielles de $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ est une sous-suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence. D'après le théorème 5.1 [4], cette suite est donc convergente. □

4. Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge et sa limite est égale à la valeur d'adhérence.

Topologie
Cours de L3 par Frédéric Hélein [1], octobre–décembre 2024

Mercredi 4 décembre 2024

5.8 Espaces d'applications bornées

Rappelons (Définition 3.3) que, si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont deux espaces métriques, on note $\mathcal{F}_b(X,Y)$ l'espace des applications *bornées* de X vers Y.

Théorème 5.4 *Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. Supposons que (Y,d_Y) est* ***complet****. Alors $(\mathcal{F}_b(X,Y),d_\infty)$ est* ***complet****.*

Démonstration — Considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications dans $(\mathcal{F}_b(X,Y),d_\infty)$. Puisque, $\forall x\in X$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $d_Y(f_n(x),f_m(x))\leq d_\infty(f_n,f_m)$, on en déduit que, pour tout $x\in X$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (Y,d_Y) et, comme (Y,d_Y) est complet, cette suite converge dans (Y,d_Y) vers une limite que nous noterons $f(x)$.

Il nous reste à montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la distance d_∞. Pour cela nous utilisons à nouveau le fait que cette suite est de Cauchy pour cette norme :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n,m\in\mathbb{N},\quad n,m\geq N\implies d_\infty(f_n,f_m)<\varepsilon$$

autrement dit, si nous fixons une valeur quelconque $\varepsilon>0$, alors il existe $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, tel que si $n,m\in\mathbb{N}$ sont tels que $n,m\geq N(\varepsilon)$, alors

$$\forall x\in X,\ d_Y(f_n(x),f_m(x))<\varepsilon$$

Fixons ε et $n\geq N(\varepsilon)$ et faisons tendre m vers $+\infty$ dans ce qui précède. Nous obtenons :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N(\varepsilon)\quad\Longrightarrow\quad[\ \forall x\in X,\ d_Y(f_n(x),f(x))<\varepsilon\ ]\iff d_\infty(f_n,f)<\varepsilon$$

Comme ce qui précède est vrai pour toute valeur de $\varepsilon>0$, cela signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{F}_b(X,Y),d_\infty)$. □

Puisque tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, nous en déduisons le résultat suivant.

Corollaire 5.1 *Soit (X,d_X) un espace métrique et soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(\mathcal{F}_b(X,E),d_\infty)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X vers E. Alors $(\mathcal{F}_b(X,E),d_\infty)$ est un espace de Banach.*

D'où l'on déduit immédiatement ce second corollaire.

1. Université Paris Cité, Licence 3 de Mathématiques, helein@math.univ-paris-diderot.fr

Corollaire 5.2 *Avec les mêmes hypothèses que dans le résultat précédent. soit* $(\mathcal{C}_b(X,E), d_\infty)$ *l'espace vectoriel des applications* ***continues*** *bornées de* X *vers* E*. Alors* $(\mathcal{C}_b(X,E), d_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration — D'après le corollaire 5.1, $(\mathcal{F}_b(X,E), d_\infty)$ est complet et, en vertu du théorème 3.1 (théorème de la convergence uniforme), $(\mathcal{C}_b(X,E), d_\infty)$ est un sous-ensemble **fermé** de $(\mathcal{F}_b(X,E), d_\infty)$. Donc, en appliquant la Proposition 5.2 nous en déduisons le résultat. □

5.9 Convergence normale

Dans ce qui suit, (X, d_X) est un espace métrique et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_b(X,E)$ on note $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\|$.

Définition 5.5 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathcal{F}_b(X,E)$*. On dit que la série* $\sum_n u_n$ ***converge normalement sur*** X *si la série* $\sum_n \|u_n\|_\infty$ *converge dans* $[0,+\infty[$.

De façon totalement équivalente, on peut aussi dire que la série $\sum_n u_n$ converge normalement sur X si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge absolument dans** $(\mathcal{F}_b(X,E), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 5.1 *Soit* E *un espace de Banach*[2]*. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathcal{F}_b(X,E)$ *et supposons que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge normalement sur* X*. Alors il existe* $u \in \mathcal{F}_b(X,E)$ *tel que :*

(i) pour tout $x \in X$*, la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ *converge absolument vers* $u(x)$ *dans* $(E, \|\cdot\|)$ *;*

(ii) la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* u *dans* $\mathcal{F}_b(X,E)$*.*

(iii) en particulier si, $\forall n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est continue, alors* u *est continue.*

Démonstration — La preuve de ce résultat est immédiate. La propriété (iii) est une conséquence de (ii) et du théorème de la limite uniforme **??**. □

Dans la plupart des exemples que vous rencontrerez, E sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Des exemples importants sont les *séries entières* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ (où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et les séries de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}$ (où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\theta \in \mathbb{R}$).

6 Connexité

6.1 Connexité par arc

Définition 6.1 *Soit* (X, τ) *un espace topologique. Pour tout* $x, y \in X$*, on dit que* x *« est connecté par un chemin à »* y *et on écrit*

$$x \sim y$$

2. Rappelons que cette hypothèse est satisfaite dès que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie

*s'il existe une application $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ **continue** telle que*

$$\gamma(0) = x \quad \text{et} \quad \gamma(1) = y$$

L'application $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X)$ est appelée *chemin* x joignant x à y.

Proposition 6.1 *Soit (X, τ) un espace topologique. La relation « est connecté par un chemin à » est une relation d'équivalence.*

Démonstration — Nous vérifions les trois propriétés suivantes.

- $\sim$ est réflexive : pour tout $x \in X$, il suffit de choisir le chemin constant $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X)$ tel que $\gamma(t) = x$, $\forall t \in [0,1]$.
- $\sim$ est réflexive : si $x \sim y$, il existe un chemin $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X)$ joignant x à y. Alors le chemin inverse γ^-, défini par $\gamma^-(t) = \gamma(t) = \gamma(1-t)$ joint y à x.
- $\sim$ est transitive : si $x \sim y$ et $y \sim z$, soit γ_1 un chemin joignant x à y et soit γ_2 un chemin joignant y à z. Alors le chemin $\gamma_1 \star \gamma_2$ défini par

$$\begin{array}{ll} \forall t \in [0, \frac{1}{2}], & \gamma_1 \star \gamma_2(t) = \gamma_1(2t) \\ \forall t \in [\frac{1}{2}, 1], & \gamma_1 \star \gamma_2(t) = \gamma_1(2t-1) \end{array}$$

est continu et joint x à z, donc $x \sim z$. □

Définition 6.2 *Soit (X, τ) un espace topologique.*

*(i) une classe d'équivalence de $\sim$ dans X est appelée une **composante connexe par arc** de X.*

*(ii) X est dit **connexe par arc** s'il admet **au plus**[3] **une** composante connexe par arc.*

(iii) une partie $A \subset X$ est dite connexe par arc si $(A, \tau|_A)$ est connexe par arc.

Proposition 6.2 *Soit (X, τ) un espace topologique et soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille de parties **connexes par arc** de X. Alors*

$$\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i \in I} Y_i \ \text{ est connexe par arc}$$

Démonstration — Supposons $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$. Alors $\exists a \in \bigcap_{i \in I} Y_i$. Soit $x, y \in \bigcup_{i \in I} Y_i$. Alors

$$\begin{array}{ll} \exists i \in I, & x \in Y_i \\ \exists j \in I, & y \in Y_j \end{array}$$

Comme Y_i est connexe par arc et $a \in Y_i$, $x \sim a$ et, comme Y_j est connexe par arc et $a \in Y_j$, $a \sim y$. Donc $x \sim y$ par transitivité. □

Proposition 6.3 *L'image d'une partie connexe par arc par une application continue est connexe par arc.*

3. Ainsi on convient que $\emptyset$ est connexe par arc.

Démonstration — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et $A \subset X$ une partie connexe par arc. Alors, $\forall y_1, y_2 \in f(A)$, $\exists x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ et, puisque $x_1 \sim x_2$ dans A, il existe $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], A)$ qui joint x_1 à x_2. Alors $f \circ \gamma$ joint y_1 à y_2 dans $f(A)$ et est continue. Donc $y_1 \sim y_2$ dans $f(A)$. □

Proposition 6.4 *Soit X_1 et X_2 deux espaces topologiques. Alors $X_1 \times X_2$ est connexe par arc si et seulement si X_1 et X_2 sont tous les deux connexes par arc.*

Démonstration — Si $X_1 \times X_2$ est connexe par arc, alors X_1 et X_2 le sont aussi car ce sont les images de $X_1 \times X_2$ par les projections $X_1 \times X_1 \longrightarrow X_1$ et $X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$, qui sont continues.

Réciproquement supposons que X_1 et X_2 sont connexes par arc. Soit deux points $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ et $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$. Alors, puisque X_1 est connexe par arc, il existe un chemin $\gamma_1 \in \mathcal{C}([0,1], X_1)$ qui joint x_1 à y_1 dans X_1 et, de même, il existe un chemin $\gamma_2 \in \mathcal{C}([0,1], X_1)$ qui joint x_2 à y_2 dans X_2. Alors le chemin $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ est continu et joint (x_1, x_2) à (y_1, y_2) dans $X_1 \times X_2$. □

6.2 Le cas de $\mathbb{R}$: passage du local au global

En réalité vous connaissez certainement déjà le théorème le plus profond de ce chapitre : il s'agit du *théorème des valeurs intermédiaires*. Il permet le passage d'une information locale (la continuité) à une information globale (toutes les valeurs entre les valeurs aux bornes sont atteintes). Le résultat suivant est du même type (la propriété d'être un ouvert est une propriété locale, il en est de même pour la propriété d'être un fermé). Sa preuve est quasiment la même que celle du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 6.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit U une partie de I qui est non vide, ouverte et fermée pour la topologie induite sur I. Alors U coïncide avec I.*

Démonstration — Il suffit de montrer que $I \subset U$. Puisque $U \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in U$ et montrer $I \subset U$ revient à montrer que

$$I \cap [x_0, +\infty[\subset U \tag{1}$$

et, de même, $I \cap]-\infty, x_0] \subset U$. Nous nous contenterons de montrer (1). Pour cela considérons l'ensemble

$$\mathcal{U} := \{x \in [x_0, +\infty[\; ; \; [x_0, x] \subset U\}$$

Nous remarquons que $\mathcal{U}$ satisfait les propriétés suivantes : (i) $\mathcal{U} \neq \emptyset$ car $x_0 \in U$; (ii) $\mathcal{U} \subset U \subset I$; (iii) $\forall x \in \mathcal{U}$, $[x_0, x] \subset \mathcal{U}$. Deux grands cas se présentent.

(a) *Si $\mathcal{U}$ est non majoré.* Alors, $\forall A \geq x_0$, $\exists x \in \mathcal{U} \cap [A, +\infty[$ et donc $[0, A] \subset \mathcal{U} \subset U$. Cela entraîne que $[x_0, +\infty[\subset U$. On en déduit (1).

(b) *Si* $\mathcal{U}$ *est majoré*, il admet une borne supérieure $b \in [x_0, +\infty[$. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in \mathcal{U}$, $b - \varepsilon \leq x \leq b$, ce qui entraîne que $b - \varepsilon \in \mathcal{U}$. Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $[x_0, b[\subset \mathcal{U}$. En particulier b est dans l'adhérence de $\mathcal{U}$ et donc de I. Deux sous-cas se présentent alors :

(i) si $b \notin I$, la seule possibilité est que b est la borne supérieure de I, *id est* $I \cap [x_0, +\infty[= [x_0, b[$. Puisque $[x_0, b[\subset \mathcal{U} \subset U$, on en déduit (1).

(ii) si $b \in I$, alors, comme U est *fermé dans* I et comme b est dans l'adhérence de U, $b \in U$. Donc $[x_0, b] \subset U$. Deux sous-cas apparaissent alors :
- soit $I \cap [x_0, \infty[= [x_0, b]$ et alors on obtient (1).
- soit $I \cap [x_0, \infty[\neq [x_0, b]$ (tout en ayant $I \cap [x_0, \infty[\supset [x_0, b]$), ce qui implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que $b + \delta \in I$ et, comme I est un intervalle, $[x_0, b + \delta] \subset I$. Mais alors, commme $b \in U$ et U est *ouvert dans* I, $\exists \varepsilon > 0$, $]b - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon[\cap I \subset U$. Quitte à imposer $\varepsilon < \delta/2$, on a $]b - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon[\subset U$. En particulier $[b, b + \varepsilon] \subset U$, ce qui entraîne $b + \varepsilon \in \mathcal{U}$. Mais cela contredit le fait que $b = \sup \mathcal{U}$. Donc ce dernier cas n'a pas lieu.

$\square$

Corollaire 6.1 (le théorème des valeurs intermédiaires) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint toutes les valeurs comprises entre les deux valeurs prises par f au bord de I.*

Démonstration — Nous nous contenterons de montrer le résultat dans le cas où $I = [a, b]$ et $f(a) < f(b)$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\gamma \in [f(a), f(b)]$ tel que, $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \neq \gamma$. Soit $U = f^{-1}([f(a), \gamma[)$. Alors
- U est ouvert car f est continue et $U = f^{-1}(\,] - \infty, \gamma[\,)$
- U est fermé car f est continue et $U = f^{-1}(\,] - \infty, \gamma]\,)$

De plus U est non vide puisque $a \in U$, donc, d'après le théorème 6.1, $U = [a, b]$. En particulier $b \in U$, ce qui équivaut à $f(b) \in [f(a), \gamma[$. Mais cela contredit $\gamma \leq f(b)$. $\square$

Proposition 6.5 *Les parties connexes par arc de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Démonstration — **(i)** D'une part, tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est connexe par arc. En effet, pour tous $x, y \in I$, le chemin γ défini par $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$ joint x à y dans I.
(ii) D'autre part, toute partie I de $\mathbb{R}$ qui est connexe par arc est un intervalle. Pour montrer cela, nous excluerons le cas trivial où $I = \emptyset$. Soit $x, y \in I$. Alors $x \sim y$ donc il existe $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], I)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. D'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, l'image de γ contient l'intervalle $[x, y] := \{(1 - t)x + ty\ ;\ t \in [0, 1]\}$ et comme $\gamma([0, 1]) \subset I$, $[x, y] \subset I$. Donc

$$\bigcup_{x,y \in I} [x, y] \subset I$$

En particulier, soit

$$a \;:=\; \left| \begin{array}{ll} \inf I & \text{si } I \text{ est minoré} \\ -\infty & \text{si } I \text{ est non minoré} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad b \;:=\; \left| \begin{array}{ll} \sup I & \text{si } I \text{ est majoré} \\ +\infty & \text{si } I \text{ est non majoré} \end{array} \right.$$

et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à valeur dans I qui tend vers a et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante à valeur dans I qui tend vers b. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n] \subset I$, d'où l'on déduit que $]a, b[\subset I$. Comme par ailleurs, selon les cas que I est majoré ou non, minoré ou non, on a $I \subset [a, b], [a, +\infty[,]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$, on en déduit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

6.3 Connexité

Définition 6.3 *Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X est* ***connexe*** *si les seules parties de X qui sont à la fois* fermées *et* ouvertes *sont X et $\emptyset$.*

Ainsi le théorème 6.1 dit que tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes. Nous verrons une réciproque à ce résultat plus loin.

Une autre définition d'un espace topologique connexe est possible.

Définition 6.4 *Soit (X, τ) un espace topologique. Alors X est connexe si toute application continue f de X dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est constante.*

Démonstration de l'équivalence entre les deux définitions — Supposons que X n'est pas connexe. Alors il existe une partie $U \subset X$ qui est à la fois ouverte et fermée. Par conséquent $V := X \setminus U$ est également ouverte et fermée. L'application $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x) = 0$, $\forall x \in U$ et $f(x) = 1$, $\forall x \in V$ est alors continue et non constante.

Réciproquement supposons qu'il existe une application $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ continue et non constante. Alors $U = f^{-1}(\{0\})$ est ouvert et fermé et est différent de $\emptyset$ et de X. □

Proposition 6.6 *Soit (X, τ) un espace topologique et soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille de parties* ***connexes*** *de X. Alors*

$$\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} Y_i \text{ est connexe}$$

Démonstration — Fixons un point $x_0 \in \bigcap_{i\in I} Y_i$. Nous allons montrer que toute application $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ qui est continue est constante. Considérons une telle application f. Alors, pour tout $i \in I$, la restriction $f|_{Y_i}$ est continue sur Y_i et est donc constante et, comme $x_0 \in Y_i$, $f(x) = f(x_0)$, $\forall x \in Y_i$. On en déduit que $f(x) = f(x_0)$, $\forall x \in X$. □

Proposition 6.7 *L'image d'un espace topologie connexe par une application continue est connexe.*

Démonstration — Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Nous excluons le cas trivial où X est vide. Supposons que X est connexe et que f est continue. Montrons que $f(X)$ est connexe. Soit $U \subset f(X)$ une partie non vide, ouverte et fermée de $f(X)$. Alors on a à la fois $U = \mathcal{O} \cap f(X)$ et $U = \Phi \cap f(X)$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y et Φ est un fermé de Y. Donc $f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert et $f^{-1}(U) = f^{-1}(\Phi)$ est fermé dans X. De plus $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ car $U \subset f(X)$. Donc comme X est connexe, $f^{-1}(U) = X$, ce qui entraîne que $f(X) \subset U$. Mais comme $U \subset f(X)$, on en déduit que $U = f(X)$. □

Théorème 6.2 *Tout espace topologique connexe par arc est connexe.*

Démonstration — Soit (X, τ) un espace topologique connexe par arc, que nous supposerons non vide. Soit $U \subset X$ une partie non vide, ouverte et fermée. Nous montrons que $U = X$.

Puisque $U \neq \emptyset$, $\exists x_0 \in U$. Alors tout élément $x \in X$ est connecté à x_0 par un arc $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X)$. Comme U est ouvert et fermé, $\gamma^{-1}(U)$ est une partie de $[0,1]$ qui est à la fois ouverte et fermée. De plus, comme $\gamma(0) = x_0$, $0 \in \gamma^{-1}(U)$ et donc $\gamma^{-1}(U) \neq \emptyset$. D'après le théorème 6.1, on en déduit que $\gamma^{-1}(U) = [0,1]$. Donc en particulier $1 \in \gamma^{-1}(U)$, c'est à dire $x = \gamma(1) \in U$. Donc $X = U$. $\square$

Nous en déduisons immédiatement les deux résultats suivants.

Proposition 6.8 *Les parties connexes de* $\mathbb{R}$ *sont exactement les intervalles de* $\mathbb{R}$.

Démonstration — Dans un sens le théorème 6.1 nous dit exactement que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est connexe.

Montrons la réciproque. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie connexe non vide. Montrons par l'absurde que $\forall x, y \in A$, $[x, y] \subset A$. Supposons le contraire : $\exists x, y \in A$, $\exists z \in [x, y]$, $z \notin A$. Alors $U :=]-\infty, z[\cap A$ et $V :=]z, +\infty[\cap A$ sont deux ouverts tels que $V = A \setminus U$ (donc en particulier U est ouvert et fermé). De plus $U \neq \emptyset$ puisque $x \in U$ et $U \neq A$ car $y \in V = A \setminus U$: c'est une contradiction. Donc

$$\bigcup_{x,y \in A} [x, y] \ \subset \ A$$

On conclut en procédant comme dans la démonstration de la proposition 6.5. $\square$

Proposition 6.9 *Tout espace vectoriel normé est connexe par arc et donc connexe.*

Démonstration — Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Il est convexe (c'est à dire : deux points $x, y \in V$ sont reliés par le segment $[0,1] \ni t \longmapsto (1-t)x + ty \in V$) et donc en particulier connexe par arc et donc connexe. $\square$

Une conséquence immédiate de la Proposition 6.9 est le résultat suivant.

Corollaire 6.2 *Dans un espace vectoriel normé* $(V, \|\cdot\|)$*, une partie* ouverte *de* V *non triviale (id est différente de* $\emptyset$ *et* V*) ne peut pas être* fermée *et, réciproquement, une partie* fermée *de* V *non triviale ne peut pas être* ouverte.

La réciproque du théorème 6.2 est fausse en générale, sauf en ce qui concerne les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 6.3 *Toute partie* ***ouverte*** *connexe de* $\mathbb{R}^n$ *est connexe par arc.*

Démonstration — Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe (que nous supposons non vide). Rappelons que la relation $x \sim y$ (x « est connecté par un chemin à » y) est une relation d'équivalence. Soit $x_0 \in \mathcal{O}$, considérons la classe d'équivalence de x_0 : $[x_0] = \{x \in \mathcal{O}\ ;\ x \sim y\}$. Alors

- $[x_0]$ est ouvert : pour tout $x \in [x_0]$, $\exists r > 0$, $B(x,r) \subset \mathcal{O}$ (car $\mathcal{O}$ est ouvert) et, $\forall y \in B(x,r)$, x est connecté à y par le chemin $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], \mathcal{O})$ défini par $\gamma(t) = (1-t)x + ty$. Donc $x_0 \sim x$ et $x \sim y$ entraînent $x_0 \sim y$ et donc $B(x,r) \subset [x_0]$.
- $[x_0]$ est fermé : pour tout point $x \in \mathcal{O}$ qui est dans l'adhérence de $[x_0]$ et pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap [x_0] \neq \emptyset$. De plus, puisque $\mathcal{O}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, nous pouvons choisir r tel que $B(x,r) \subset \mathcal{O}$. Donc $\exists y \in B(x,r) \cap [x_0]$. Alors $x_0 \sim y$ et $y \sim x$ entraînent $x_0 \sim x$ et donc $x \in [x_0]$.

Donc comme $[x_0]$ est non vide, ouvert et fermé dans $\mathcal{O}$ et comme $\mathcal{O}$ est connexe, $[x_0] = \mathcal{O}$, ce qui prouve que $\mathcal{O}$ est connexe par arc. $\square$

Application : il n'existe pas d'homéomorphisme entre le cercle $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et la droite $\mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $p = [0] \in S^1$, alors la restriction de φ à $S^1 \setminus \{p\}$ est un homéomorphisme entre $S^1 \setminus \{p\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{\varphi(p)\}$. On remarque que $S^1 \setminus \{p\}$ est homéomorphe à $]0, 2\pi[$, donc connexe. Donc, d'après la proposition 6.7, comme φ est continue, $\varphi(S^1 \setminus \{p\})$ est connexe. Mais cela est impossible car $\varphi(S^1 \setminus \{p\}) = \mathbb{R} \setminus \{\varphi(p)\}$ n'est pas un intervalle. $\square$