CC1 du MI2 — le jeudi 9 février 2023

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est strictement interdit. Une attention particulière sera apportée à la justification des arguments et à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 — Déterminer l'ensemble des diviseurs de $m = 84$.

Exercice 2 — En justifiant ses calculs, déterminer le $\mathrm{pgcd}(84, 72)$. En déduire $\mathrm{ppcm}(84, 72)$

Exercice 3 — Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne $45x + 70y = 5$.

1) Déterminer une solution particulière de cette équation.
2) En déduire l'ensemble des solutions S de cette équation.
3) Déterminer l'ensemble des solutions de la congruence $45x \equiv 5(\mathrm{mod}\,70)$.

Exercice 4 — Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes z et z' définis par

$$z = (\sqrt{3} + 4i)(\sqrt{2} - i), \qquad z' = \frac{5 - i}{\sqrt{3} + i}.$$

CC1 (durée 1 heure)

1) a) Calculer le pgcd de 194 et 30.
   b) Soit $c \in \mathbb{Z}$. On considère l'équation $(E_c)\colon\ 194x + 30y = c$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. À quelle condition sur c l'équation (E_c) a-t-elle une solution ?
   c) Trouver une solution de l'équation $(E_2)\colon\ 194x + 30y = 2$.
   d) Trouver toutes les solutions de l'équation $(E_2)\colon\ 194x + 30y = 2$.

2) a) Trouver un nombre entier entre 0 et 5 congru à 23 modulo 7.
   b) Trouver un nombre entier entre 0 et 5 congru à 2024 modulo 3.
   c) Trouver un nombre entier entre 0 et 5 congru à 23^{2024} modulo 7.

3) a) Montrer que le produit de 3 entiers consécutifs est divisible par 3.
   b) Montrer que le produit de 3 entiers consécutifs est divisible par 6.
   c) Montrer que le produit de 4 entiers consécutifs est divisible par 24

4) a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}.i\mathrm{i}$
   b) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $-2\mathrm{i}$.
   c) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{4}}$

CC1 du 17 février 2025 (durée 1 heure)

1) Soit $n = \overbrace{111111111}^{\text{9 fois le chiffre 1}}$ le nombre entier dont l'écriture en base 10 est formée de 9 fois le chiffre 1.
On a donc : $n = 1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 + 10^6 + 10^7 + 10^8$.
   a) Le nombre n est-il divisible par 9 ? Justifier.
   b) Le nombre n est-il divisible par 99 ? Justifier.

2) a) Trouver un nombre entier entre 0 et 4 congru à 17 modulo 5.
   b) Trouver un nombre entier entre 0 et 3 congru à 2025 modulo 4.
   c) Trouver un nombre entier entre 0 et 4 congru à 17^{2025} modulo 5.

3) a) Calculer le pgcd de 134 et 32.
   b) Soit $c \in \mathbb{Z}$. On considère l'équation $(E_c) :\ 134x + 32y = c$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
   À quelle condition sur c l'équation (E_c) a-t-elle une solution ?
   c) Trouver une solution de l'équation $(E_6) :\ 134x + 32y = 6$.
   d) Trouver toutes les solutions de l'équation $(E_6) :\ 134x + 32y = 6$.

4) a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$.
   b) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $7\sqrt{3} + 7\mathrm{i}$.
   c) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{3}}$.

Barème : 1) sur $1 + 2$ points ; 2) sur $1 + 1 + 2$ points ; 3) sur $2 + 2 + 2 + 2$ points ; 4) sur $2 + 2 + 2$ points.