~~CC3~~ CC2 du groupe 2 de MI2 — le mardi 11 avril 2023

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est strictement interdit. Une attention particulière sera apportée à la justification des arguments et à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 — On considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ -x-2y=3, \\ x+2y+z=1. \end{cases}$$

a) Écrire ce système linéaire sous forme de relation matricielle. On appellera A la matrice de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ utilisée pour cela.

b) La matrice de A est-elle inversible ? Si oui déterminer son inverse.

c) En déduire l'ensemble des solutions du système à l'aide d'un calcul matricielle que l'on détaillera.

Exercice 2 — On considère la matrice N définie par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) La matrice N est-elle inversible ?

b) Calculer N^2 et N^3.

c) Soit $M = I_3 + N$. En utilisant la question b), justifier que M vérifie $M^3 - 3M^2 + 3M - I_3$. En déduire M^{-1} en fonction de M.

d) Donner la valeur des coefficients de M^{-1}.

Exercice 3 — On considère la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que B est inversible et calculer B^{-1}.

Université Paris Cité
UFR de Mathématiques

Année 2023/2024
MI2, groupes Info 1 et Info 4

CC2 (durée 1 heure)

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

   a) Calculer B^2 et vérifier que $B^3 = 0$.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier.
   c) La matrice B est-elle inversible ? Justifier.

2) Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose : $C_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{m}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer le rang de C_m en fonction de m.
   b) On note : $C = C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

      Montrer que C est inversible et calculer C^{-1}.

3) Soit $k \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la condition suivante portant sur un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$(\star) \qquad P(0) = 0 \text{ et } P(1) = 1 \text{ et } P(2) = k.$$

   a) Pour quelle(s) valeur(s) de k existe-t-il $P = uX + v \in \mathbb{R}_1[X]$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$?
   b) Montrer, en étudiant un certain système d'équations linéaires (E) par la méthode de Gauss, qu'il existe une infinité de $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_1[X]$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.

Université Paris Cité
UFR de Mathématiques

Année 2024/2025
MI2, groupes Info 3, Info 4 et Info 5

CC2 du 7 avril 2025 (durée 1 heure)

Question de cours

Soit $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Que vaut le rang de T ?
Expliquer.

Exercices

1) (a) Décomposer $P = X^3 + 8$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Décomposer $P = X^3 + 8$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2) On considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(\star) \qquad z^3 - 4\mathrm{i}z^2 + (-6 + \mathrm{i})z + 1 + 3\mathrm{i} = 0.$$

   (a) Trouver une solution « évidente » de $(\star)$ de la forme $z = \mathrm{i}t$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Quelles sont les racines complexes du polynôme $Q = X^2 - 3\mathrm{i}X - 3 + \mathrm{i}$?
   (c) Résoudre l'équation $(\star)$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $A^2 - 3A$.
   (b) Démontrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Barème : Question de cours sur 2 points ; 1) sur $3 + 2$ points ; 2) sur $2 + 4 + 2$ points ; 3) sur $2 + 3$ points.