Chapitre III

Polynômes

.1 Généralités

Dans la suite, on note $\mathbb{K}$ à la place de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

.1.1 Définition

Un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

- Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme P.
- Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le polynôme nul, il est noté 0.
- On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$; on le note $\deg P$. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.
- Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ est appelé un polynôme constant. Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.

Définition Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.
Pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}$. On associe ainsi au polynôme P une fonction polynôme (que l'on note encore P)

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

.1.2 Opérations sur les polynômes

- **Égalité.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \quad a_i = b_i$$

  et on dit que P et Q sont égaux.
- **Addition.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$. On définit :

$$P + Q = (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0)$$

- **Multiplication.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$. On définit :

$$P \times Q = c_r X^r + c_{r-1} X^{r-1} + \cdots + c_1 X + c_0$$

$$\text{avec } r = n + m \text{ et } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ pour } k \in \{0, \ldots, r\}.$$

- **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le i-ème coefficient est λa_i.

L'addition et la multiplication des polynômes se font sans problème. En particulier elles sont commutatives et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. On peut aussi définir la composition de deux polynômes comme on le fait pour la composition des fonctions.

- **Composition** Soient $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q(X)$ deux polynômes, on définit :

$$P \circ Q(x) = P(Q(X)) = a_nQ(X)^n + a_{n-1}Q(X)^{n-1} + \cdots + a_1Q(X) + a_0.$$

Pour le degré il faut faire attention :

Proposition

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$$

$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q.$$

On note $\mathbb{K}_n[X] = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\big\}$. Si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

.1.3 Vocabulaire

Complétons les définitions sur les polynômes.

Définition

- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type a_kX^k) sont appelés monômes.
- Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle terme dominant le monôme a_nX^n. Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant de P.
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un polynôme unitaire.

Exemple Quel est le degré du polynôme $P(X) = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)$?

Remarque Tout polynôme est donc une somme finie de monômes.

.2 Division, racines

.2.1 Division des polynômes

Définition

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$.

On dit aussi que A est multiple de B ou que A est divisible par B.

Théorème [Division euclidienne des polynômes]

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q est appelé le quotient et R le reste et cette écriture est la division euclidienne de A par B.

Notez que la condition $\deg R < \deg B$ signifie $R = 0$ ou bien $0 \leqslant \deg R < \deg B$.

Enfin $R = 0$ si et seulement si $B|A$.

.2.2 Racines d'un polynôme

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine (ou un zéro) de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition

$$P(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X - \alpha) \text{ divise } P$$

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une racine de multiplicité k de P si $(X-\alpha)^k$ divise P alors que $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P. Lorsque $k = 1$ on parle d'une racine simple, lorsque $k = 2$ d'une racine double, etc.

On dit aussi que α est une racine d'ordre k. On observera que si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme de degré n alors il a au plus n racines comptées avec leurs multiplicités.

.3 Formule de Taylor pour les polynômes

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on peut écrire

$$P(X) = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X-\alpha)^2 + \cdots \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n.$$

Exemple Le polynôme $P(X) = X^3 + 5X^2 + 10X + 10$ se réécrit $P(X) = (X+1)^3 + 2(X+1)^2 + 3(X+1) + 4$.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il y a équivalence entre :

(i) α est une racine de multiplicité k de P.

(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.

(iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque pour comprendre la proposition précédente Par analogie avec la dérivée d'une fonction, si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ alors le polynôme $P'(X) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}$ est le polynôme dérivé de P.

.4 Théorème de d'Alembert-Gauss

Passons à un résultat essentiel de ce chapitre. Attention, ici on distingue les propriétés pour $\mathbb{R}[X]$ et pour $\mathbb{C}[X]$:

Théorème [Théorème de d'Alembert-Gauss] (admis)

Tout polynôme à coefficients complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}[X]$) de degré $n \geqslant 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Nous admettons ce théorème.

Exemple $P(X) = X^n - 1$ admet n racines distinctes.

Pour les polynômes à coefficients réels, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}[X]$, nous avons le résultat plus faible suivant :

Théorème

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{R}$.

Exemple Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors P admet 2 racines réelles distinctes $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors P admet 2 racines complexes distinctes $\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle double $\dfrac{-b}{2a}$.

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines dans $\mathbb{C}$. Dans le cas où $\Delta < 0$ on dit que le polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple Trouver les racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$. On calculera $P(\frac{2}{3})$.

.5 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ la factorisation dans $\mathbb{C}$ s'écrit

$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, les $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1, ..., k_r$ sont leurs multiplicités respectives.

Exemple Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + 1$.

Si le polynôme est dans $\mathbb{R}[X]$ dans le théorème précédent, les α_i sont soit réels, soit deux à deux conjugués. En regroupant les termes deux à deux conjugués, on obtient

Théorème

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors la factorisation s'écrit

$$P = \lambda(X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_r)^{k_r}Q_1^{\ell_1}\cdots Q_s^{\ell_s},$$

où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2, c'est-à-dire de la forme $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Exemple Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - X^4 + X - 1$. On remarquera une racine évidente et on utilisera la factorisation de l'exemple précédent.

Exemple Le polynôme $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$ est décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver sa décomposition dans dans $\mathbb{C}[X]$.