

# Chapitre V

## Suites numériques

### 1 Généralités

#### 1.2 Définition

Une **suite** réelle (resp. complexe) est une **application**  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ).  
Pour tout entier, l'image  $u(n)$ , notée  $u_n$ , est appelée **terme de rang**  $n$  (ou d'indice  $n$ ) de la suite  $u$ .  
La suite peut débuter au rang  $n_0 \in \mathbb{N}$ , l'ensemble de départ de  $u$  est alors  $\{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$ .  
La suite est notée  $u$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_n)_{n \geq n_0}$  si elle commence au rang  $n_0$ , ou simplement  $(u_n)$ .

**Remarque** : dans le souci d'alléger l'écriture, nous omettons parfois de préciser que  $n$  est un entier.

#### 1.3 Suites extraites

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante, la suite  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée **suite extraite** de  $(u_n)$ .  
**NB** :  $\varphi$  est strictement croissante si et seulement si  $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n)$ .

#### Remarque

Il faut comprendre que  $\varphi$  sélectionne certains termes de la suite mais en conservant l'ordre des rangs. Par exemple  $(u_4, u_3, u_8, u_7, u_{12}, u_{11}, \text{etc.})$  n'est pas une suite extraite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  car l'ordre des rangs n'a pas été respecté : on a en effet  $\varphi(1) = 3 < \varphi(0) = 4$  par exemple.

#### Exemples classiques

$(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est la **suite extraite des termes de rangs pairs** ( $\varphi : n \mapsto 2n$ ).

$(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est la **suite extraite des termes de rangs impairs** ( $\varphi : n \mapsto 2n+1$ ).

#### 1.4 Rappels sur les suites réelles

##### Definition : suite positive

Une suite réelle est **positive** (resp. **négative**) si tous ses termes sont positifs (resp. négatifs).

##### Definition : suite majorée, minorée, bornée

Une suite réelle est **majorée** (resp. **minorée**, **bornée**) si l'ensemble  $u(\mathbb{N}) = \{u(n), n \in \mathbb{N}\}$  est majoré (resp. minoré, borné).

##### Definition : suite monotone

- Une suite réelle est **croissante** si deux termes quelconques sont dans le même ordre que leurs rangs :  
 $\forall n, n' \in \mathbb{N}, n \leq n' \Rightarrow u_n \leq u_{n'}$ .
- Une suite réelle est **décroissante** si deux termes quelconques sont dans l'ordre inverse de leurs rangs :  
 $\forall n, n' \in \mathbb{N}, n \leq n' \Rightarrow u_n \geq u_{n'}$ .
- Une suite réelle est **monotone** si elle est croissante ou décroissante :  
 $(\forall n, n' \in \mathbb{N}, n \leq n' \Rightarrow u_n \leq u_{n'})$  OU  $(\forall n, n' \in \mathbb{N}, n \leq n' \Rightarrow u_n \geq u_{n'})$ .
- Ces définitions s'étendent au sens strict (strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone) en passant au sens strict toutes les inégalités.  
Par exemple, une suite réelle est **strictement croissante** si :  $\forall n, n' \in \mathbb{N}, n < n' \Rightarrow u_n < u_{n'}$ .

### Caractérisation d'une suite monotone

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle :

- $(u_n)$  **croissante**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ .
- $(u_n)$  **décroissante**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .
- La croissance ou la décroissance est stricte si l'inégalité est stricte pour tout  $n$ .

**Remarque** Les définitions de suite croissance et suite décroissance sont des extensions directes des définitions de croissance et décroissance pour les fonctions :

- Une fonction  $f$  de  $[a, b]$  ( $a < b$ ) dans  $\mathbb{R}$  est **croissante** si :  
 $\forall x, x' \in [a, b], x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ .
- Une fonction  $f$  de  $[a, b]$  ( $a < b$ ) dans  $\mathbb{R}$  est **décroissante** si :  
 $\forall x, x' \in [a, b], x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$ .

Les définitions données dans la caractérisation par les termes consécutifs  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont spécifiques des suites et ne sont possibles qu'à cause du caractère discret de  $\mathbb{N}$ .

### Caractérisation d'une suite monotone strictement positive

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle **strictement positive** :

- $(u_n)$  **croissante**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ .
- $(u_n)$  **décroissante**  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ .
- La croissance ou la décroissance est stricte si l'inégalité est stricte.

## 2 Limites

### 2.2 Suite convergente (vers une limite finie)

#### Definition : suite réelle convergente

Soit  $l \in \mathbb{R}$ , la suite  $(u_n)$  **converge vers**  $l$  si et seulement si :

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que  $(\forall n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon)$

**Autrement dit**, aussi petit que soit  $\varepsilon > 0$ , à partir d'un certain rang  $N$ , tous les termes de  $(u_n)$  sont à une distance de  $l$  inférieure à  $\varepsilon$ .

On dit aussi que  $(u_n)$  admet pour limite  $l$ .

**Exercice** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge vers une limite  $l > 0$ . Peut-on dire que les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang ?

#### Propriété : unicité de la limite

Si une suite  $(u_n)$  est convergente, alors sa **limite est unique** et on la note  $\lim u_n$ .

#### Théorème

Si  $(u_n)$  est **convergente** alors elle est **bornée**.

#### Définition : suite divergente

On dit que  $(u_n)$  est **divergente** si et seulement si elle n'est pas convergente (vers une limite finie).

## 2.3 Suite qui tend vers l'infini

### Définition : limite $+\infty$

La suite  $(u_n)$  **admet pour limite**  $+\infty$  si et seulement si :

Pour tout réel  $A > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que  $(\forall n \geq N, u_n > A)$

**Autrement dit**, aussi proche de  $+\infty$  que soit  $A > 0$ , à partir d'un certain rang  $N$ , tous les termes de  $(u_n)$  sont supérieurs à  $A$ .

### Définition : limite $-\infty$

La suite  $(u_n)$  **admet pour limite**  $-\infty$  si et seulement si :

Pour tout réel  $A < 0$ , il existe un entier  $N$  tel que  $(\forall n \geq N, u_n < A)$

**Autrement dit**, aussi proche de  $-\infty$  que soit  $A < 0$ , à partir d'un certain rang  $N$ , tous les termes de  $(u_n)$  sont inférieurs à  $A$ .

**NB** :  $(u_n)$  admet pour limite  $-\infty$  équivaut à  $(-u_n)$  admet pour limite  $+\infty$ .

### Corollaire

Si  $\lim u_n$  est infinie alors  $(u_n)$  diverge.

**NB** : la réciproque est fausse.

### Théorème

Si  $\lim u_n$  est infinie alors  $(u_n)$  n'est pas bornée.

**NB** : la réciproque est fausse.

## 2.4 Cas des suites extraites

### Théorème

Si la suite  $(u_n)$  est convergente vers  $l$ , alors **toutes ses suites extraites convergent vers  $l$** .

**Par contraposée**, si une suite extraite ne converge pas, ou si deux suites extraites, par exemple  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , n'admettent pas la même limite, alors  $(u_n)$  ne converge pas.

### Théorème

$(u_n)$  converge si et seulement si les suites extraites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers la même limite  $l$ .

### Théorème

Soit  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ . Si la suite  $(u_n)$  **admet pour limite**  $a$ , alors **toutes ses suites extraites admettent une limite** et cette limite est  $a$ .

**Remarque** : on utilise couramment la contraposée.

### 3 Théorèmes fondamentaux sur les limites de suites

#### 3.2 Opérations sur les limites des suites convergentes

##### **Théorème**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes.

- 1) Si  $\lim u_n = l$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  alors  $\lim \lambda u_n = \lambda l$ .
- 2) Si  $\lim u_n = l$  et  $\lim v_n = l'$  alors  $\lim u_n + v_n = l + l'$  et  $\lim u_n v_n = l l'$ .
- 3) Si  $\lim u_n = l$  et  $l \neq 0$  alors  $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$ .

#### 3.3 Opérations et limite infinie

##### **Théorème : inverse d'une suite convergeant vers 0**

Soient  $(u_n)$  une suite réelle.

Si  $\lim u_n = 0$  par valeurs positives (c'est-à-dire que pour tout  $n$  à partir d'un certain rang  $u_n > 0$ ), alors

$$\lim \frac{1}{u_n} = +\infty.$$

Idem avec valeurs négatives et  $-\infty$ .

##### **Théorème : opérations avec une suite de limite infinie**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles avec  $\lim u_n = +\infty$ .

- 1)  $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ .
- 2) si  $(v_n)$  est minorée (en particulier si elle est convergente) alors  $\lim u_n + v_n = +\infty$ .
- 3) si  $(v_n)$  est minorée par un réel strictement positif (en particulier si elle converge vers une limite  $\ell > 0$ ) alors  $\lim u_n v_n = +\infty$ .
- 4) si  $(v_n)$  est majorée par un réel strictement négatif (en particulier si elle converge vers une limite  $\ell < 0$ ) alors  $\lim u_n v_n = -\infty$ .

Dans les cas où ces théorème d'opérations sur les limites (finies ou infinies) ne s'appliquent pas, on dit qu'on a une **FORME INDETERMINEE**. Ces formes indéterminées doivent être connues. Dans ces cas, il faut souvent **lever les indéterminations**.

#### 3.4 Limites et encadrements

##### **Lemme**

Soient  $(u_n)$  une suite réelle positive ou nulle à partir d'un certain rang.

Si  $u_n$  admet une limite, alors  $\lim u_n \geq 0$ .

##### **Théorème du passage à la limite**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $u_n \leq v_n$  pour tout  $n$  à partir d'un certain rang.

- 1) Si  $\lim u_n = +\infty$  alors  $\lim v_n = +\infty$ .
- 2) Si  $\lim v_n = -\infty$  alors  $\lim u_n = -\infty$ .
- 3) Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes alors  $\lim u_n \leq \lim v_n$ .

**Remarque pour le 3)** : en passant à la limite une inégalité au sens stricte, on n'obtient qu'une inégalité au sens large : c'est-à-dire que si on a  $u_n < v_n$  pour tout rang  $n$ , on obtient uniquement l'**inégalité large** en passant à la limite

Il ne faut surtout pas confondre ce résultat avec le théorème suivant, qui permet de montrer la convergence d'une suite :

### Théorème des gendarmes

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  des suites réelles telles que  $u_n \leq v_n \leq w_n$  pour tout  $n$  à partir d'un certain rang. Si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  **convergent vers une même limite**  $l$  alors  $(v_n)$  converge aussi vers  $l$ .

## 3.5 Limite et suites monotones

### Théorème de la limite monotone

- 1) Soit  $(u_n)$  une suite réelle **croissante** :
- si  $(u_n)$  est **majorée** alors  $(u_n)$  est **convergente** (et sa limite est  $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ ),
  - si  $(u_n)$  n'est **pas majorée**, alors  $\lim u_n = +\infty$ .
- 2) Soit  $(v_n)$  une suite réelle **décroissante** :
- si  $(v_n)$  est **minorée** alors  $(v_n)$  est **convergente** (et sa limite est  $\inf\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ ),
  - si  $(v_n)$  n'est **pas minorée**, alors  $\lim v_n = -\infty$ .

## 4 Suites arithmétiques, géométriques et puissances

**Suite arithmétique** : C'est une suite qui vérifie la relation de récurrence :  $u_{n+1} = u_n + r$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $r$  est un réel fixé appelé la *raison* de la suite.

On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = u_0 + r n$ . Donc si  $r = 0$  la suite est constante, et sinon on a suivant le signe de  $r$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty .$$

**Suite géométrique** : c'est une suite vérifiant la relation de récurrence :  $u_{n+1} = q u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $q$  est un réel fixé également appelé la *raison* de la suite.

On montre par récurrence pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n = u_0 q^n$  donc :

- si  $q = 1$  la suite est constante, donc converge vers  $u_0$
- si  $|q| < 1$  ou si  $u_0 = 0$ , elle converge vers 0
- si  $u_0 \neq 0$  et  $q \leq -1$ , elle n'admet pas de limite (réelle ou infinie)
- si  $u_0 \neq 0$  et  $q > 1$ , on a suivant le signe de  $u_0$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty .$$

**Exercice** (d'après Terracher exercice de Terminale S)

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $x \in [0, +\infty[$  on a

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (\text{inégalité de Bernoulli}).$$

- 2) En déduire que si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ .

- 3) A l'aide d'un théorème de comparaison, en déduire la limite de  $q^n$  lorsque  $-1 < q < 1$ .

**Suite puissance** : c'est une suite de la forme  $u_n = n^\alpha$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\alpha$  est un réel fixé appelé la *puissance* de la suite.

On montre que pour  $\alpha > 0$ , la suite est divergente vers  $+\infty$  ;

Pour  $\alpha = 0$ , la suite est constante égale à 1 ;

Pour  $\alpha < 0$ , la suite est convergente vers 0.

**Proposition** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe  $a \in [0, +\infty]$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a .$$

1) On suppose que  $a > 1$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2) On suppose que  $a < 1$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

3) Si  $a = 1$ , on ne peut pas conclure.

## 5 Suites arithmético géométriques

**Définition : suite arithmético-géométrique**

Soit  $(r, k)$  un couple de  $\mathbb{R} - \{0, 1\} \times \mathbb{R}^*$ . Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique si elle vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = r u_n + k \quad (E).$$

On dit que ces suites sont aussi des suites récurrentes linéaires d'ordre 1 à coefficient constants.

Soit  $(r, k)$  un couple de  $\mathbb{R} - \{0, 1\} \times \mathbb{R}^*$  et soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle vérifiant la relation de récurrence  $(E)$ . La donnée de  $u_0$  permet de définir la suite de façon biunivoque.

Il existe un unique réel  $a$  tel que :  $a = r a + k$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - a$ , est une suite géométrique de raison  $r$ .

On peut ainsi exprimer pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $r, k$  et  $u_0$ .

## 6 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Définition : suite récurrente linéaire d'ordre 2**

Soit  $(a, b)$  un couple de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ . Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si elle vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \quad (E).$$

Soit  $(a, b)$  un couple de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite qui vérifie la relation de récurrence  $(E)$ . La donnée de  $u_0$  et  $u_1$  définit la suite de façon univoque.

Une suite géométrique de raison  $r \in \mathbb{R}$  vérifie la relation de récurrence  $(E)$  si, et seulement si  $r^2 = ar + b$ .

L'équation  $r^2 - ar - b$  est appelée équation caractéristique.

Soit  $\Delta = a^2 + 4b$  le discriminant de l'équation caractéristique.

Trois cas sont à distinguer.

1)  $\Delta > 0$ . L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . Dans ce cas il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

2)  $\Delta = 0$ . L'équation caractéristique admet une racine double notée  $r$ . Alors il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha n + \beta)r^n.$$

3)  $\Delta < 0$ . L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ . On pose  $r = |\omega|$  et  $\theta = \arg(\omega)$ . Alors il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta).$$

Dans les trois cas, on trouve les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  grâce à la donnée de  $u_0$  et  $u_1$ .

## 7 Suites adjacentes

### Définition : suites adjacentes

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites numériques. On dit que ces suites sont des suites adjacentes si  $(u_n)$  une suite **croissante**,  $(v_n)$  une suite **décroissante** et  $\lim u_n - v_n = 0$ .

### Théorème des suites adjacentes

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  un couple de suites **adjacentes** comme dans la définition ci-dessus.

Alors  $(u_n)$  et  $(v_n)$  **convergent vers une même limite  $l$** .

De plus, pour tout  $n$ , on a l'encadrement  $u_n \leq l \leq v_n$ .

## 8 Suites récurrentes (non linéaires) et points fixes

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $f(I) \subset I$  (on dit que  $I$  est *stable* par  $f$ ).

En choisissant un premier terme  $u_0 \in I$ , on peut donc définir une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation de récurrence :  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que la suite récurrente est associée à la fonction  $f$ . On se place ci-dessous dans cette situation.

**Remarque** il faut bien distinguer le traitement des suites définies explicitement à l'aide d'une fonction, de la forme  $u_n = f(n)$  des suites récurrentes associées à une fonction. En particulier, ici la croissance de  $f$  n'entraîne pas la croissance de la suite, ce qui est une erreur classique.

**Remarque** les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques sont des exemples particuliers de telles suites avec  $f$  respectivement linéaires, de la forme  $x \rightarrow x + b$  et affines.

### Théorème (monotonie des suites récurrentes)

Soit  $(u_n)$  une suite définie par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f \text{ est une application continue}$$

Si la fonction  $f$  est **croissante**, la suite  $(u_n)$  est **monotone**. Elle est croissante si  $u_1 - u_0$  est positif, décroissante sinon.

Si  $f$  est **décroissante**, les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones, l'une est croissante et l'autre est décroissante.

On a donc des caractérisations pour dire si la suite définie par récurrence est croissante (ou décroissante). Si on sait par ailleurs qu'elle est majorée (ou minorée) on peut en conclure qu'elle est convergente. Il reste alors à déterminer la valeur de sa limite.

On a également le résultat général suivant dont la preuve sera faite plus tard avec la caractérisation formelle de la continuité des fonctions :

**Théorème (Admis)**

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $I$  converge vers  $\ell \in I$ , alors la suite  $(v_n) = (f(u_n))$  converge vers  $f(\ell)$ .

**Corollaire**

Soit  $(u_n)$  une suite définie par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f \text{ est une application continue}$$

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente vers une limite  $\ell$  alors on a nécessairement  $\ell = f(\ell)$ , c'est à dire que  $\ell$  est un point fixe de la fonction  $f$ .

**Remarque** Si  $f$  est continue et décroissante, l'étude des points fixes de  $f \circ f$  permet de déterminer les limites éventuelles des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ . Si on montre qu'elles sont adjacentes, on peut en conclure que la suite  $(u_n)$  est convergente.

# Chapitre VI

## Introduction aux Séries numériques

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à des sommes ayant une infinité de termes.

Par exemple que peut bien valoir la somme infinie suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ?$$

Cette question a été popularisée sous le nom du **paradoxe de Zénon**.

On tire une flèche à 2 mètres d'une cible. Elle met un certain laps de temps pour parcourir la moitié de la distance, à savoir un mètre. Puis il lui faut encore du temps pour parcourir la moitié de la distance restante, et de nouveau un certain temps pour la moitié de la distance encore restante. On ajoute ainsi une infinité de durées non nulles, et Zénon en conclut que la flèche n'atteint jamais sa cible! Zénon ne concevait pas qu'une infinité de distances finies puisse être parcourue en un temps fini. Et pourtant nous allons voir dans ce chapitre que la somme d'une infinité de termes peut être une valeur finie.

## 1 Définitions

Soit  $(u_k)_{k \geq 0}$  une suite de nombres réels (ou de nombres complexes - mais on restera dans le cadre de ce cours dans le cadre des suites réelles).

On pose

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  s'appelle la **série** de terme général  $u_k$ .

Cette série est notée par la somme infinie  $\sum_{k \geq 0} u_k$ .

La suite  $(S_n)$  s'appelle aussi la **suite des sommes partielles**.

## 2 Exemple : Série géométrique

Fixons  $q \in \mathbb{R}$ . Définissons la suite  $(u_k)_{k \geq 0}$  par  $u_k = q^k$ ; c'est une suite géométrique.

La **série géométrique**  $\sum_{k \geq 0} q^k$  est la suite des sommes partielles :

$$S_0 = 1 \quad S_1 = 1 + q \quad S_2 = 1 + q + q^2 \quad \dots \quad S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad \dots$$

### 3 Convergence d'une série

Si la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  admet une limite finie dans  $\mathbb{R}$ , on note

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

On appelle alors  $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  la **somme** de la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$ , et on dit que la série est **convergente**.

Sinon, on dit qu'elle est **divergente**.

**Notations.**

On fera donc la distinction entre une série quelconque  $\sum_{k \geq 0} u_k$ , et on réservera la notation  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  à une série convergente ou à sa somme.

### 4 Série géométrique

**Proposition**

Soit  $q \in \mathbb{R}$ . La série géométrique  $\sum_{k \geq 0} q^k$  est convergente si et seulement si  $|q| < 1$ . On a alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

**Exemples**

1) Série géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$  :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Cela résout le paradoxe de Zénon : la flèche arrive bien jusqu'au mur !

2) Série géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$ , avec premier terme  $\frac{1}{3^3}$ . On se ramène à la série géométrique commençant à  $k = 0$  en ajoutant et retranchant les premiers termes :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{13}{9} = \frac{3}{2} - \frac{13}{9} = \frac{1}{18}$$

3) Le fait de calculer la somme d'une série à partir de  $k = 0$  est purement conventionnel. On peut toujours effectuer un changement d'indice pour se ramener à une somme à partir de 0. Une autre façon pour calculer la série  $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$  est de faire le changement d'indice  $n = k - 3$  (et donc  $k = n + 3$ ) :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^3} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{27} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$$

4)  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{-1}{4}} = \frac{4}{5}$ .

## 5 Reste d'une série convergente

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : changer un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature, convergente ou divergente.

Par contre, si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée.

Une façon pratique d'étudier la convergence d'une série est d'étudier son reste :

le **reste d'ordre**  $n$  d'une série convergente  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  est :

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

### Proposition

Si une série est convergente, **alors**  $S = S_n + R_n$  (pour tout  $n \geq 0$ ) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ .

## 6 Suites et séries, sommes télescopiques

Il n'y a pas de différence de fond entre l'étude des suites et des séries. On passe de l'une à l'autre très facilement.

Tout d'abord rappelons qu'à une série  $\sum_{k \geq 0} u_k$ , on associe la somme partielle  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et que par définition la série est convergente si la suite  $(S_n)_{n \geq 0}$  converge.

### Définition

Une **somme télescopique** est une série de la forme  $\sum_{k \geq 0} (a_{k+1} - a_k)$ .

### Proposition

Cette série est convergente si et seulement si  $\ell := \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$  existe et dans ce cas on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \ell - a_0.$$

### Exemple

La série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

est convergente et a la valeur 1. En effet, elle peut être écrite comme somme télescopique. Plus précisément la somme partielle vérifie :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Donc la suite des sommes partielles tend vers 1 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . C'est à dire que la série est convergente de somme 1.

Par changement d'indice, on a aussi que les séries  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  et  $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$  sont convergentes et de même somme 1.

## 7 Le terme général d'une série convergente tend vers 0

### Théorème

Si la série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  converge, alors la suite des termes généraux  $(u_k)_{k \geq 0}$  tend vers 0.

Ce théorème est surtout utilisé par sa contraposée : si le terme général  $(u_k)_{k \geq 0}$  de la série ne tend pas vers 0 alors la série n'est pas convergente.

Par exemple les séries  $\sum_{k \geq 1} (1 + \frac{1}{k})$  et  $\sum_{k \geq 1} k^2$  sont divergentes car leurs termes généraux ne tendent pas vers 0.

### Attention !

Il existe des séries  $\sum_{k \geq 0} u_k$  telles que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$ , mais  $\sum_{k \geq 0} u_k$  diverge.

L'exemple le plus classique est la **série harmonique** :

La série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$  diverge.

En effet, la somme partielle est  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Calculons la différence entre les deux sommes partielles  $S_{2n}$  et  $S_n$  :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

On raisonne alors par l'absurde. Supposons que  $S_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  (lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ). Alors on a aussi  $S_{2n} \rightarrow \ell$  (lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ) et donc  $S_{2n} - S_n \rightarrow \ell - \ell = 0$ . Ce qui entre en contradiction avec l'inégalité  $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ .

Donc la série ne peut pas converger. Plus précisément, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ . Cependant on a pourtant  $u_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0$  (lorsque  $k \rightarrow +\infty$ ).

## 8 Linéarité

### Proposition

Soient  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  et  $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$  deux séries convergentes de sommes respectives  $A$  et  $B$ , et soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Alors la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$  est convergente et de somme  $\lambda A + \mu B$ . On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2^k} + \frac{5}{3^k} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + 5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + 5 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 2 + 5 \frac{3}{2} = \frac{19}{2}.$$

## 9 Séries à termes positifs

Les séries à termes positifs ou nuls se comportent comme les suites croissantes et sont donc plus faciles à étudier.

### 9.2 Convergence par les sommes partielles

#### Rappels

Soit  $(s_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante de nombres réels.

- Si la suite est majorée, alors la suite  $(s_n)$  converge, c'est-à-dire qu'elle admet une limite finie.
- Sinon la suite  $(s_n)$  tend vers  $+\infty$ .

Appliquons ceci aux séries  $\sum u_k$  à **termes positifs**, c'est-à-dire  $u_k \geq 0$  pour tout  $k$ .

Dans ce cas la suite  $(S_n)$  des sommes partielles, définie par  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , est une suite croissante.

En effet  $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$ . Par les rappels sur les suites, nous avons donc :

#### Proposition (pour les séries à termes positifs)

Une série à termes positifs est une série convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Autrement dit, elle converge si et seulement s'il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $S_n \leq M$ .

De plus, dans le cas de convergence, la somme de la série  $S$  vérifie bien sûr  $\lim S_n = S$ , mais aussi  $S_n \leq S$ , pour tout  $n$ .

### 9.3 Théorème de comparaison

Quelle est la méthode générale pour trouver la nature d'une série à termes **positifs** ?

On la compare avec des séries classiques simples au moyen du théorème de comparaison suivant.

#### Théorème [Théorème de comparaison]

Soient  $\sum u_k$  et  $\sum v_k$  deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe  $k_0 \geq 0$  tel que, pour tout  $k \geq k_0$ ,  $u_k \leq v_k$ .

- Si  $\sum v_k$  converge alors  $\sum u_k$  converge.
- Si  $\sum u_k$  diverge alors  $\sum v_k$  diverge.

### 9.4 Exemples

#### Exemple 1

Nous avons déjà vu plus haut que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  converge.

Nous allons en déduire que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$  converge. En effet, on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, il existe  $k_0$  tel que pour  $k \geq k_0$  :

$$\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

En fait c'est vrai pour  $k \geq 4$ , mais il est inutile de calculer une valeur précise de  $k_0$ . On en déduit que la série de terme général  $\frac{1}{2k^2}$  converge, d'où le résultat par linéarité.

### Exemple 2

Voici un autre exemple fondamental, la **série exponentielle**

La série  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$  converge.

Notons que  $0! = 1$  et que pour  $k \geq 1$ ,  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ . En effet  $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$  pour  $k \geq 2$ , mais  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  (par changement d'indice) est une série convergente. Donc la série exponentielle  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$  converge. En fait, par définition, la somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$  vaut le nombre d'Euler  $e = \exp(1)$ .

### Exemple 3

Inversement, nous avons vu que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$  diverge. On en déduit facilement que les séries  $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$  et  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$  divergent également.

Terminons avec une application intéressante : le développement décimal d'un réel.

### Exemple 4 : le développement décimal d'un réel

Soit  $(a_k)_{k \geq 1}$  une suite d'entiers tous compris entre 0 et 9. La série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$  converge. En effet, son terme général  $u_k = \frac{a_k}{10^k}$  est majoré par  $\frac{9}{10^k}$ . Mais la série géométrique  $\sum \frac{1}{10^k}$  converge, car  $\frac{1}{10} < 1$ . La série  $\sum \frac{9}{10^k}$  converge aussi par linéarité, d'où le résultat.

Une telle somme  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$  est une écriture décimale d'un réel  $x$ , avec ici  $0 \leq x \leq 1$ .

Par exemple, si  $a_k = 3$  pour tout  $k$  :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots = 0,333 \dots = \frac{1}{3}$$

On retrouve bien sûr le même résultat à l'aide de la série géométrique :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

## 9.5 Théorème des équivalents (ADMIS)

Nous allons améliorer le théorème de comparaison avec la notion de suites équivalentes, pour les suites **strictement positives** cette fois.

Soient  $(u_k)$  et  $(v_k)$  deux suites **strictement positives**. Alors les suites  $(u_k)$  et  $(v_k)$  sont **équivalentes** si

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_k}{v_k} = 1.$$

On note alors

$$u_k \sim v_k.$$

**Théorème** [Théorème des équivalents] (ADMIS-hors programme L1)

Soient  $(u_k)$  et  $(v_k)$  deux suites à termes strictement positifs.

Si  $u_k \sim v_k$  alors les séries  $\sum u_k$  et  $\sum v_k$  sont de même nature.

C'est-à-dire que si les deux suites sont équivalentes alors elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes. Bien sûr, en cas de convergence, il n'y a aucune raison que les deux sommes soient égales. Enfin, si les suites sont toutes les deux strictement négatives, la conclusion reste valable.

Revenons sur un exemple qui montre que ce théorème est très pratique :

Les suites  $\frac{1}{k^2}$  et  $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$  sont équivalentes. Comme la série  $\sum \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  converge (exemple vu plus haut), alors cela implique que  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge.

## 9.6 Exemples

### Exemple 1

Les deux séries

$$\sum \frac{k^2 + 3k + 1}{k^4 + 2k^3 + 4} \quad \text{et} \quad \sum \frac{k + \ln(k)}{k^3} \quad \text{convergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à  $\frac{1}{k^2}$ , et nous savons que la série  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge.

### Exemple 2

Par contre

$$\sum \frac{k^2 + 3k + 1}{k^3 + 2k^2 + 4} \quad \text{et} \quad \sum \frac{k + \ln(k)}{k^2} \quad \text{divergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à  $\frac{1}{k}$ , et nous avons vu que la série  $\sum \frac{1}{k}$  diverge.

## 10 Séries absolument convergentes

### 10.2 Séries absolument convergentes

#### Définition

On dit qu'une série  $\sum_{k \geq 0} u_k$  de nombres réels (ou complexes) est **absolument convergente** si la série  $\sum_{k \geq 0} |u_k|$  est convergente.

## Exemple

- 1) Par exemple la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos k}{k^2}$  est absolument convergente. Car pour  $u_k = \frac{\cos k}{k^2}$  on a  $|u_k| \leq \frac{1}{k^2}$ . Comme la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  converge alors  $\sum_{k \geq 1} |u_k|$  converge aussi.
- 2) La série harmonique alternée  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$  n'est pas absolument convergente. Car pour  $v_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ , la série  $\sum_{k \geq 0} |v_k| = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1}$  diverge.

Être absolument convergent est plus fort qu'être convergent :

### Théorème (ADMIS)

Toute série absolument convergente est convergente.

## 11 Règle du quotient de d'Alembert

La règle du quotient de d'Alembert est un moyen efficace de montrer si une série de nombres réels (ou complexes) converge ou pas.

### Théorème [Règle du quotient de d'Alembert]

Soit  $\sum u_k$  une série dont les termes généraux sont des nombres réels (ou complexes) non nuls.

- 1) S'il existe une constante  $0 < q < 1$  et un entier  $k_0$  tels que, pour tout  $k \geq k_0$ ,

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{converge.}$$

La série est même absolument convergente.

- 2) S'il existe un entier  $k_0$  tel que, pour tout  $k \geq k_0$ ,

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \geq 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{diverge.}$$

Le plus souvent, la situation que l'on étudie est lorsque la suite  $\frac{u_{k+1}}{u_k}$  converge ; la position de la limite par rapport à 1 détermine alors la nature de la série.

Voici donc une application directe et la plus utilisée, pour les séries de nombres réels, **strictement positifs** :

### Corollaire [Règle du quotient de d'Alembert]

Soit  $\sum u_k$  une série à termes **strictement positifs**, telle que  $\frac{u_{k+1}}{u_k}$  converge vers  $\ell$ .

- 1) Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_k$  converge.
- 2) Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_k$  diverge.
- 3) Si  $\ell = 1$  on ne peut pas conclure en général.

## Exemple

1) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la **série exponentielle**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{converge.}$$

En effet pour  $u_k = \frac{x^k}{k!}$  on a

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{\left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \right|}{\left| \frac{x^k}{k!} \right|} = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

La limite étant  $\ell = 0 < 1$  alors par la règle du quotient de d'Alembert, la série est absolument convergente, donc convergente. Par définition la somme est  $\exp(x)$  :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2)  $\sum_{k \geq 0} \frac{k!}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}$  converge, car  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{2k+1}$  tend vers  $\frac{1}{2} < 1$ .

3)  $\sum_{k \geq 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$  diverge, car  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$  tend vers  $4 > 1$ .

### Remarque

- Le théorème ne peut s'appliquer si certains  $u_k$  sont nuls, contrairement à la règle des racines de Cauchy que l'on verra après.
- Notez bien que le théorème ne permet pas toujours de conclure. Faites aussi bien attention que l'hypothèse est  $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq q < 1$ , ce qui est plus fort que  $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| < 1$ .
- De même le corollaire ne permet pas de conclure lorsque  $\frac{u_{k+1}}{u_k} \rightarrow 1$ . Par exemple pour les séries  $\sum u_k = \sum \frac{1}{k}$  et  $\sum v_k = \sum \frac{1}{k^2}$  nous avons  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1$ , de même que  $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \rightarrow 1$ . Cependant la série  $\sum \frac{1}{k}$  diverge alors que  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge.

## 12 Règle des racines de Cauchy

**Théorème** [Règle des racines de Cauchy]

Soit  $\sum u_k$  une série de nombres réels ou complexes.

1) S'il existe une constante  $0 < q < 1$  et un entier  $k_0$  tels que, pour tout  $k \geq k_0$ ,

$$\sqrt[k]{|u_k|} \leq q < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{converge.}$$

La série est même absolument convergente.

2) S'il existe un entier  $k_0$  tel que, pour tout  $k \geq k_0$ ,

$$\sqrt[k]{|u_k|} \geq 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{diverge.}$$

Le plus souvent vous l'appliquerez avec un terme général strictement positif.

**Corollaire** [Règle des racines de Cauchy]

Soit  $\sum u_k$  une série à termes **positifs**, telle que  $\sqrt[k]{u_k}$  converge vers  $\ell$ .

- 1) Si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_k$  converge.
- 2) Si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_k$  diverge.
- 3) Si  $\ell = 1$  on ne peut pas conclure en général.

Dans la pratique, il faut savoir bien manipuler les racines  $k$ -ème :

$$\sqrt[k]{u_k} = (u_k)^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\frac{1}{k} \ln u_k\right)$$

**Exemple**

1) Par exemple,

$$\sum \left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^k \quad \text{converge,}$$

car  $\sqrt[k]{u_k} = \frac{2k+1}{3k+4}$  tend vers  $\frac{2}{3} < 1$ .

2) Par contre

$$\sum \frac{2^k}{k^\alpha} \quad \text{diverge quel que soit } \alpha > 0.$$

En effet,

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{(\sqrt[k]{k})^\alpha} = \frac{2}{(k^{\frac{1}{k}})^\alpha} = \frac{2}{(\exp(\frac{1}{k} \ln k))^\alpha} \rightarrow 2 > 1.$$

### 13 Séries de Riemann

Les séries de Riemann sont les séries de la forme

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$$

La règle du quotient de d'Alembert et la règle des racines de Cauchy ne s'appliquent pas aux séries de Riemann car  $\frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} \rightarrow 1$  et  $\sqrt[k]{u_k} \rightarrow 1$ .

On peut mettre en oeuvre des règles plus difficiles et hors programme.

On retiendra le résultat suivant :

**Proposition** [Séries de Riemann] (ADMIS)  
 Soit  $\alpha > 0$ . Alors la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .