Examen

19 mai 2022 - 9h30 - 12h30

Durée : 3h. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les notes manuscrites sont interdites.
Cartables en bas de l'amphi.

Exercice 1. (2 Points)
1) Justifier qu'il ne peut pas exister de couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $m+n=101$ et $PGCD(m,n)=3$.
2) Trouver un couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $m+n=102$ et $PGCD(m,n)=3$.

Exercice 2. (4 Points)
Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Justifier que la matrice A a le même déterminant que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ayant la même première ligne que A).
2) En déduire la valeur du déterminant de A puis que A est inversible.
3) Calculer l'inverse de la matrice A.

Exercice 3. (4 Points)
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n-1 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
On indiquera bien les détails des calculs de chaque coefficient.

Exercice 4. (6 Points)
Dans cet exercice, on souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que les trois points du plan complexe M_0, M_1, M_2 d'affixes respectives $1, z, 1+z^2$ soient alignés.

Questions préliminaires : pour ces trois premières questions, on traite un cas particulier et on pose $z = 1+i$.
1) Calculer $1+z^2$.
2) Placer dans le plan complexe les trois points M_0, M_1, M_2 d'affixes respectives 1, z et $1+z^2$.
3) Donner un argument pour justifier que les trois points sont alignés.

À partir de maintenant on prend z quelconque différent de 0. On note toujours M_0 le point d'affixe 1, M_1 le point d'affixe z et M_2 le point d'affixe $1+z^2$.

4) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$.
5) Justifier que les trois points M_0, M_1, M_2 sont alignés si, et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z-1 = \lambda z^2$.
6) En déduire que les trois points sont alignés si, seulement si la partie imaginaire de $\dfrac{z-1}{z^2}$ est égale à 0.
7) En écrivant z sous sa forme algébrique $z = x+iy$, exprimez $\dfrac{z-1}{z^2}$ en fonction de x et y et justifier que les trois points sont alignés si, et seulement si $(x-1)^2+y^2=1$ ou $y=0$.
8) Que se passe t-il si $z=0$?
9) Conclure en donnant clairement une condition nécéssaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que les trois points du plan complexe M_0, M_1, M_2 d'affixes respectives $1, z, 1+z^2$ soient alignés.
10) Vérifier que le point $z = 1+i$ qu'on avait proposé dans les questions préliminaires à titre d'exemple vérifie bien l'énoncé que vous avez proposé à la question 9).

Exercice 5. (4 Points)
1) Justifier sans calcul que le polynôme $P(X) = X^4 + 9$ n'a pas de racines réelles.
2) Justifier que $\sqrt{3}\exp(i\frac{\pi}{4})$ est une racine de $P(X)$. Ecrire cette racine sous forme algébrique.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^4 = -9$ et placer les solutions dans le plan complexe (on aura intérêt à utiliser la forme exponentielle de -9 en tant que nombre complexe).
4) Écrire la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ (on écrira les racines sous forme algébrique dans cette factorisation).
5) En déduire la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ (on pourra développer le résultat obtenu pour vérifier).

Examen du MI2 — le 17 mai 2023

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est strictement interdit. Une attention particulière sera apportée à la justification des arguments et à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 — a) Déterminer le pgcd de 17 et de 65.

b) Existe-t-il des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $17u + 65v = 1$? Si oui, déterminer un couple (u, v) qui convient. On détaillera la méthode utilisée.

c) Déterminer l'ensemble des solutions (x, y) de l'équation $17x + 65y = 1$

Exercice 2 — a) Déterminer les racines complexes sous forme exponentielle de l'équation $z^4 = 81i$.

b) On note $z_1, \dots z_k$ ces solutions complexes. Calculer leur somme $s = z_1 + \dots + z_k$ des solutions.

Exercice 3 — Le but de cet exercice est de factoriser le polynôme

$$P(X) = X^4 - (6+3i)X^3 + (6+8i)X^2.$$

a) Déterminer les racines carrées complexes de $w = 3 + 4i$. On les exprimera en coordonnées cartésiennes.

b) Déterminer les racines complexes du polynôme $Q(X) = X^2 - (6+3i)X + 6 + 8i$.

c) En déduire l'ensemble des racines de P. Pour chacune, on précisera sa multiplicité.

d) Déterminer une factorisation du polynôme $P(X)$ en produit de polynômes d'irréductibles sur $\mathbb{C}$.

e) Déduire de la question b), sans faire de calculs supplémentaires, les racines complexes du polynôme $R(X) = X^2 - (6-3i)X + 6 - 8i$.

Exercice 4 — On considère les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?

b) Si la matrice A est inversible, déterminer la matrice inverse.

c) Calculer le produit matricielle AB

d) Donner la valeur du déterminant de AB. La matrice AB est-elle inversible ?

Exercice 5 — Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans l'intervalle $]2, 4[$.

a) Donner la définition d'une suite réelle convergente.

b) Montrer si u est une suite convergente, alors sa limite est dans $[2, 4]$. On pourra pour cela faire un raisonnement par l'absurde.

c) Montrer qu'une suite réelle à valeurs dans l'intervalle $]2, 4[$ n'est pas forcément une suite convergente.

Session de juin du MI2 — le 21 juin 2023

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est strictement interdit. Une attention particulière sera apportée à la justification des arguments et à la qualité de la rédaction.

Exercice 1 — a) Déterminer le pgcd de 21 et de 165.

b) Existe-t-il des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $21u + 165v = 1$? Justifier. Si oui, déterminer un couple (u, v) qui convient.

c) Existe-t-il des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $21u + 165v = 6$? Justifier. Si oui, déterminer un couple (u, v) qui convient.

d Déterminer l'ensemble des solutions (x, y) de l'équation $21x + 165y = 2$.

Exercice 2 — a) Déterminer la forme algébrique des complexes $z_1 = \mathrm{e}^{i\pi/3}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{-i\pi/4}$.

b) Calculer le complexe $z_3 = z_1 z_2$ sous forme algébrique puis exponentielle.

c) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 3 — On rappelle la relation $169 = 13^2$.

a) Déterminer les racines carrées complexes de $w = 5 + 12i$. On les exprimera en coordonnées cartésiennes.

b) Déterminer les racines complexes du polynôme $Q(X) = X^2 - (3+4i)X - 3 + 3i$.

c) Calculer $Q(1 + i)$.

Exercice 4 — On considère les matrices A et B définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le déterminant de A. La matrice A est-elle inversible ?

b) Si la matrice A est inversible, déterminer la matrice inverse.

c) Calculer le produit matricielle AB

d) Donner la valeur du déterminant de AB. La matrice AB est-elle inversible ?

Exercice 5 —

a) Donner la définition d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle convergente.

b) Montrer qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle convergente est bornée.

c) Donner l'exemple d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle convergente qui ne soit pas monotone.

Examen

14 mai 2024 - 8h30 - 11h30

Durée : 3h. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les notes manuscrites sont interdites.
Cartables en bas de l'amphi. Téléphones éteints

Exercice 1. (3 points)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère l'équation du second degré

$$z^2 - (2 + i\alpha)z + i\alpha + 2 - \alpha = 0.$$

1) Résoudre l'équation dans le cas où $\alpha = 0$.
2) Calculer dans le cas général en fonction de α les deux solutions de l'équation et montrer qu'il existe une et une seule valeur de α pour laquelle les deux solutions sont complexes conjuguées.

Exercice 2. (3 points)
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne $11x - 7y = 3$ (on déterminera tout d'abord une solution particulière et on expliquera en détail comment on déduit l'ensemble des solutions à partir de cette solution particulière).

Exercice 3. (3 points)
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $A + A^2 = 2I_3$.
2) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3)$.
3) En déduire les solutions du système d'équations dépendant du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \alpha \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2\alpha \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. (5 points) Dans cet exercice on va factoriser le polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = (X + 1)^5 - X^5 - 1$$

1) Justifier que le polynôme P est de degré 4 (la forme développée de P n'est pas demandée).
2) Donner deux racines dans $\mathbb{Z}$ du polynôme P. Quelles sont leur multiplicité ?
On note $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.
3) Placez j, j^2, j^3, j^4, j^5 sur une figure dans le plan complexe.
4) Justifier que $1 + j + j^2 = 0$.
4) En déduire que $(1 + j)^5 = -j$ puis que j est une racine complexe de P. Quelle est l'autre racine complexe de P ?
5) Factorisez enfin P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5. (6 points)
On considère deux suites numériques (x_n) et (y_n) définies par leurs premiers termes $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et les relations de récurrence,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,5x_n + 2 \\ y_{n+1} = -0,5x_n + 0,5y_n + 1 \end{cases}$$

pour tout entier naturel n. On note $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1) Calculer U_1.
2) Écrire pour tout entier naturel n, la relation matricielle entre U_{n+1} et U_n.
On note $N = I_2 - M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.
3) Justifier que N est inversible et calculer N^{-1}.
4) Justifier avec la question précédente qu'il existe une unique matrice F qui vérifie $F = MF + P$ et montrez que $F = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n, on note $V_n = U_n - F$.
5) Calculer V_0.
6) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = MV_n$ puis montrer que pour tout n on a $V_n = M^n V_0$.
7) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ -n0,5^n & 0,5^n \end{pmatrix}$.
8) En déduire l'expression de V_n pour tout entier naturel n puis les expressions de x_n et y_n pour tout n.
9) Quelles sont les limites des suites (x_n) et (y_n).

Examen de seconde chance

25 juin 2024 - 12h - 15h

Durée : 3h. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les notes manuscrites sont interdites.
Cartables en bas de l'amphi. Téléphones éteints

Exercice 1. (2 points)
1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $4 + 4i\sqrt{3}$.
2) En déduire la forme exponentielle de $4 + 4i\sqrt{3}$.
3) Déterminer tous les nombres complexes z tels que

$$z^4 = 4 + 4i\sqrt{3}.$$

4) Placer ces solutions dans le plan complexe (on attend juste un schéma approximatif).

Exercice 2. (4 points)
Soit j la racine troisième de l'unité $\exp(\frac{2i\pi}{3})$.
1) Montrer que si j est racine d'un polynôme $F \in \mathbb{R}[X]$, j^2 est aussi racine de ce polynôme F.
2) Calculer les racines complexes du polynôme $X^2 + X + 1$ et donner une factorisation de ce polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire que $j^2 = -(1 + j)$.
Soit maintenant P le polynôme $(X + 1)^5 - X^5 - 1$.
3) Quel est le degré du polynôme P ?
4) Trouver deux racines rationnelles de P.
5) Montrez que j est aussi racine de P. En déduire une décomposition de P en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. (4 points)
On considère les polynômes $P = X^2 - X + 1 + i$ et $Q = X^4 - 2X^3 + (3 + 2i)X^2 - 2(1 + i)X + 2i$ dans $\mathbb{C}[X]$.
1) Calculer le discriminant de P, noté Δ.
2) Déterminer les racines carrées de Δ. En déduire les racines de P.
3) Montrer que P divise Q dans $\mathbb{C}[X]$.
4) En déduire la factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes irréductibles.

Exercice 4. (3 points)
On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

1) Justifier que M est inversible et calculer son inverse.
2) Justifier que quels que soient les réels a, b, c le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & a \\ 2x & + & 3y & + & z & = & b \\ x & + & 4y & - & 6z & = & c \end{array}\right.$ admet une solution unique.

Exercice 5. (2 points) On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 6$, $U_1 = 4$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+2} = \frac{5}{4}U_{n+1} - \frac{3}{8}U_n$.
1) Ecrire U_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire les variations et la convergence de la suite.

Tournez la page s'il vous plait.

Exercice 6. (5 points)
Dans cet exercice on veut montrer que si n, m sont deux entiers positifs, on a $X^m - 1$ divise $X^n - 1$ si et seulement si m divise n (pour faciliter les raisonnements on peut supposer que $m < n$ mais ce n'est pas nécessaire).

Question préliminaire : Soit $k \in \mathbb{N}$, justifier que $X^k - 1$ est toujours divisible par $X - 1$.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On va d'abord montrer que si m divise n alors $X^m - 1$ divise $X^n - 1$.
On suppose que m divise n.
1) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $X^n - 1 = (X^m)^k - 1$.
2) En utilisant la question préliminaire, justifier que $X^n - 1$ est divisible par $X^m - 1$.

On va maintenant étudier la réciproque. On suppose que $X^m - 1$ divise $X^n - 1$.
3) Justifier qu'on peut trouver un unique couple d'entiers (q, r) tels que $X^n - 1 = X^{mq+r} - 1$ avec $0 \leq r < m$.
4) Développer $(X^{mq} - 1)X^r + (X^r - 1)$.
5) Justifier que $X^m - 1$ divise $X^{mq} - 1$ puis que $X^m - 1$ doit diviser $X^r - 1$.
6) En déduire que $r = 0$ puis que m divise n.

Examen

14 mai 2025 - 14h30 - 17h30

Durée : 3h. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices et les appareils connectés ne sont pas autorisés. Les notes manuscrites sont interdites. Cartables en bas de l'amphi.

Exercice 1. (4 points)

1. Déterminer le PGCD de 1188 et 504.
2. Justifier que l'équation diophantienne $504x + 1188y = 144$ a les mêmes solutions que l'équation $14x + 33y = 4$.
3. Trouver les solutions de cette équation (on devra utiliser la lemme de Gauss et ne pas se contenter de donner les solutions).

Exercice 2. (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 - (3 + 4i)x - 1 + 5i = 0$.
2. En déduire la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme
$$Q(X) = X^3 - (4 + 4i)X^2 + (2 + 9i)X + 1 - 5i$$
sachant que l'une de ses racines est une racine réelle évidente.

Exercice 3. (3 points)

1. Rappeler la formule d'Euler qui permet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, d'exprimer $\sin(\theta)$ en fonction de $\exp(i\theta)$ et $\exp(-i\theta)$.
2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\sin^3(\theta) = -\dfrac{1}{4}\sin(3\theta) + \dfrac{3}{4}\sin(\theta)$.

Exercice 4. (4 points)
Soit M la matrice
$$M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de M et justifier avec ce calcul que M est inversible.
2. Vérifier que $M^3 = 3M - 2I_3$ où I_3 est la matrice identité de taille 3.
3. En déduire que $M^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I_3 - M^2)$ et la calculer.
4. Donner en utilisant M^{-1} la solution du système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & 4y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & 2y & & & = & 5 \end{array}\right.$

Exercice 5. (3 points)
On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 3$, $U_1 = 5$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n$.
1) Ecrire U_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire les variations et la convergence de la suite.

Exercice 6. (3 points)

1. Montrer que le polynôme $X^7 - X$ s'écrit $(X-1)X(X+1)Q(X)$ où Q est un polynôme de degré 4 qu'on ne cherchera pas à identifier.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^7 - n$ est divisible par 2, par 3 et par 6.

Examen de rattrapage

25 juin 2025 - 15h30 - 18h30

Durée : 3h. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices et les appareils connectés ne sont pas autorisés. Les notes manuscrites sont interdites. Cartables en bas de l'amphi.

Exercice 1. (3 points)

1. Calculer 7234 modulo 7 et 2025 modulo 6.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de 7234^{2020} par 7.

Exercice 2. (4 points)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
1) Calculer $(A - 2I_3)^2$ (on désigne par I_3 la matrice identité de taille 3×3).
2) En déduire A^{-1} - on développera le polynôme $(X-2)^2$.
3) Retrouver A^{-1} par calcul direct.
4) Comment utiliser A^{-1} pour trouver les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & & & = & 1 \\ -4x & + & 4y & & & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 3 \end{array} \right.$$

Exercice 3. (5 points)
Soit j la racine troisième de l'unité $\exp(\frac{2i\pi}{3})$.
1) Placer j et j^2 sur une figure représentant le plan complexe.
2) Justifier que si j est racine d'un polynôme $F \in \mathbb{R}[X]$, j^2 est aussi racine de ce polynôme F.
3) Calculer les racines complexes du polynôme $X^2 + X + 1$ et donner une factorisation de ce polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.
4) Déduire de la question précédente que $j^2 = -(1+j)$ et que $(1-j)(1-j^2) = 3$.
Soit maintenant P le polynôme $(X+1)^5 - X^5 - 1$.
5) Donner la forme développée de P.
6) Montrez que P a deux racines évidentes.
7) Montrez que j est aussi racine de P.
8) En déduire une décomposition de P en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. (8 points)
Un petit village dispose pour son approvisionnement en eau de deux réservoirs A et B reliés à deux stations de pompage.
A la fin de chaque semaine, 30 pour cent de l'eau de A a été consommée et 20 pour cent de l'eau de A est déversée dans B pour faciliter l'approvisionnement dans le village. Dans le réservoir B à la fin de chaque semaine, 60 pour cent de l'eau a été consommée. Chaque semaine les pompes fournissent en outre 10 mètres cubes dans A et la même quantité dans B. Les deux réservoirs contiennent 20 mètres cubes chacun à leur mise en service (au départ).
On note a_n le nombre de mètres cubes d'eau dans A à la semaine n (en mètres cubes) et b_n le nombre de mètres cubes dans B à la semaine n (on a donc $a_0 = 20$ et $b_0 = 20$).

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0,4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1) Justifier que l'évolution des quantités d'eau dans les deux réservoirs est donnée par la relation matricielle

$$X_{n+1} = MX_n + P \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Pour la suite des questions, on pourra admettre cette relation matricielle, même si on n'a pas pu la justifier.

2) Calculer X_1.

On note

$$N = I_2 - M = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,2 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

3) Justifier que la matrice N est inversible et calculer son inverse, notée N^{-1}.
4) En déduire U tel que $U = MU + P$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = X_n - U$.

5) Justifier que la suite des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad Y_{n+1} = MY_n \qquad Y_0 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

6) Montrer un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$M^n = \frac{1}{10^n}\begin{pmatrix} 5^n & -2.4^n + 2.5^n \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

7) Pour tout entier naturel n, exprimer Y_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8) Déduire de ces calculs à quelles quantités d'eau se stabilisent les deux réservoirs A et B à long terme.