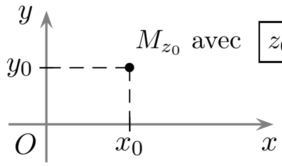
Nombres complexes : à retenir (J-Y D)

Notations



M_{z_0} avec $\boxed{z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0}$

M_{z_0} : *image de* z_0

z_0 : *affixe de* M_{z_0}

$\operatorname{Re} z_0 := x_0$ et $\operatorname{Im} z_0 := y_0$

$\overline{z_0} := x_0 - \mathrm{i}y_0$

$|z_0| := \sqrt{z_0\overline{z_0}} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

Soient $U = (a, b), V = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. On pose : $\overrightarrow{UV} = V - U = (c - a, d - b)$. $\leftarrow$ [on a bien : $\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OU}$]

On a : $\|\overrightarrow{UV}\| = |u - v|$ en notant $u := a + \mathrm{i}b$ et $v := c + \mathrm{i}d$ les affixes de U et V.

Proposition

Soient $z, u, v, w \in \mathbb{C}$.

(a) On a : $\overline{\overline{z}} = z$ et $|\overline{z}| = |z|$. De plus : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ et $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$.

On a aussi : $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$, $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(b) On a : $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$, $\overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v}$ et $|uv| = |u||v|$. De plus : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\overline{u}}{\overline{v}}$ et $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|}$ si $v \neq 0$.

(c) On a : $|u + v| \leq |u| + |v|$ « inégalité triangulaire ». $\leftarrow$ [en remplaçant u par $u - v$, on en déduit : $||u| - |v|| \leq |u - v|$]

Notation

(a) Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

On pose $\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(b) Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On rappelle qu'on écrit $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$ et lit θ *est congru à* θ' *modulo* 2π pour indiquer que $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$, où $2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque

On déduit de cette notation que : $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Les formules $\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}}$ s'appellent *les formules d'Euler.*

Proposition

Soient $z, u, v \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) On a : $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

(b) On a : $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u\,\mathrm{e}^v$ donc $\frac{1}{\mathrm{e}^u} = \mathrm{e}^{-u}$, puis $\mathrm{e}^{u-v} = \frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^v}$.

(c) On a : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \iff \alpha \equiv \beta\ [2\pi]$. En particulier $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, et : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} \iff \alpha \equiv 0\ [2\pi]$.

Remarque

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. L'égalité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ issue du (b) permet de retrouver facilement les formules qui relient $\cos(\alpha + \beta)$ et $\sin(\alpha + \beta)$ à $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\sin(\alpha)$, et $\sin(\beta)$.

Définition-Proposition

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) On appelle *un argument de* z, et note par abus « $\arg z$ », tout nombre réel θ, tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(b) Il existe un argument θ de z. Les arguments de z sont les réels congrus à θ modulo 2π.

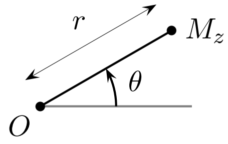
L'unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$ est appelé *argument principal de* z et noté $\operatorname{Arg} z$.

Définition

Soient $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ d'image M_z avec $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

On a : $\underbrace{\begin{cases} r = |z| \\ \theta \equiv \arg z\ [2\pi] \end{cases}}_{\text{signifie que } \theta \text{ est un argument de } z} \iff \underbrace{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \frac{z}{r} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \end{cases}}_{\text{traduit sur la figure}} \iff \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$

On dit que (r, θ) *est un couple de coordonnées polaires de* z (ou de M_z) quand $\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$, c'est-à-dire quand $\boxed{(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)}$.



Proposition

Soient $u, v, z, a, b, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) On a : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$, $\arg(uv) \equiv \arg(u) + \arg(v)\ [2\pi]$ et $\arg\left(\frac{u}{v}\right) \equiv \arg(u) - \arg(v)\ [2\pi]$.
On en déduit que : $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

(b) On a : $\operatorname{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\ [2\pi]$ quand Ω, A, B sont les images de ω, a, b, $A \neq \Omega$ et $B \neq \Omega$.

Proposition (racines carrées en coordonnées polaires)

(a) L'équation $z^2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution $z = 0$

(b) Soit $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
L'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a deux solutions qui sont : $\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Proposition (racines carrées en coordonnées cartésiennes)

Soit $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\leftarrow$ [on résout $z^2 = z_0$ en calculant x^2 et y^2 avec une condition de signe pour xy]

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = x_0 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = y_0 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ \boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \text{(égalité des modules, redondante)} \end{cases}.$$

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta := b^2 - 4ac$ et fixe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.
Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont :

$$\boxed{-\frac{b}{2a} \text{ si } \Delta = 0, \quad \text{ou,} \quad \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \frac{-b+\delta}{2a} \text{ (distinctes) si } \Delta \neq 0}.$$

Notation

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pose : $z^0 = 1$ et $z^n = \overbrace{z \times \cdots \times z}^{n \text{ termes (récurrence)}}$ quand $n \geq 1$.
On note ensuite : $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$ quand $n < 0$ et $z \neq 0$.
Lorsque $p, q \in \mathbb{N}$, ou $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $z \neq 0$, on obtient facilement : $z^p\, z^q = z^{p+q}$ et $(z^p)^q = z^{pq}$.
Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, on a : $1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

Proposition (« formule de Moivre »)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
On a : $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, ce qui s'écrit aussi $\boxed{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$.

Proposition (« formule du binôme de Newton »)

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On notera $\sum\limits_{k=0}^{n} z_k := z_0 + \cdots + z_n$ lorsque $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$.

On a : $\boxed{(u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} u^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} u^{n-1}v + \binom{n}{2} u^{n-2}v^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} v^n}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

(Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. La formule du binôme permet d'écrire $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\right)$ et $\sin(n\theta) = \operatorname{Im}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\right)$ à l'aide de $\cos^k\theta$ et $\sin^k\theta$, $0 \leq k \leq n$, ainsi que $\cos^n\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$ et $\sin^n\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^n$ à l'aide de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, $0 \leq k \leq n$.)

Proposition

(a) Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
L'équation $Z^n = z$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a n solutions : $Z_k := r^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

(b) En particulier, les racines de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (*racinesn^e de l'unité*) sont les n nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Leur somme, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k$, est égale à 0 quand $n \geq 2$.

Remarque

1. L'équation $Z^n = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution 0 (clair).

2. Les images M_0, ..., M_{n-1} dans $\mathbb{R}^2$ des nombres complexes Z_0, ..., Z_{n-1} du (a) de la proposition sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{n}}$.