

Matrices sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} : à retenir (J-Y D)

On fixe $n, p, q, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition

(a) Une *matrice* $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} est un « tableau » de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ avec } a_{1,1}, \dots, a_{1p}; \dots; a_{n1}, \dots, a_{np} \in \mathbb{K}.$$

On écrit aussi $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et appelle *coefficient de A d'indice* (i, j) le nombre a_{ij} .

(b) On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} .

On pose ensuite $\mathfrak{M}(n, \mathbb{K}) := \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K}* et $\mathfrak{M}_{0,p}(\mathbb{K}) = \mathfrak{M}_{n,0}(\mathbb{K}) = \mathfrak{M}(0, \mathbb{K}) := \{0\} \subseteq \mathbb{K}$ où la matrice vide $()$ est identifiée à 0.

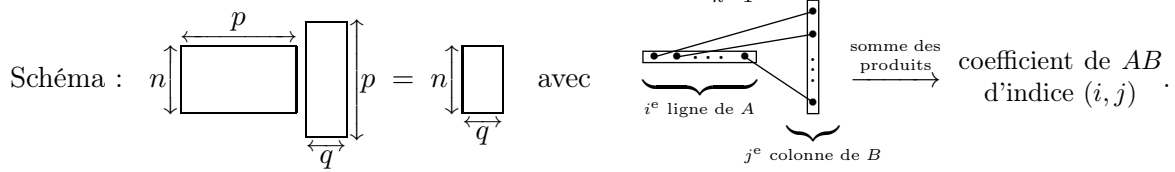
Définition

(a) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On pose :
$$\left| \begin{array}{l} \lambda A := (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } -A := (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \\ A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ et } A - B := (a_{ij} - b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \end{array} \right. .$$

(b) Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On pose : $AB := (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$.



Remarque

La formule du binôme se généralise facilement ainsi :

si $A, B \in \mathfrak{M}(p, \mathbb{K})$ vérifient $AB = BA$, alors $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle *matrice transposée de A* la matrice ${}^t A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Cela signifie que : ${}^t A = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $a'_{ij} := a_{ji}$ quand $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$.

Proposition

Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a : ${}^t B {}^t A$ est définie et ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.

Définition-Proposition

(a) Soit $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe $B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ tel que :

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n.$$

Dans ce cas B est unique, notée A^{-1} , et appelée *inverse de A*.

(b) On note $GL(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$.

Remarque

On suppose que $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ est inversible et $B \in \mathbb{K}^n$.

Le système $(E) : AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ équivaut à l'équation $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$.

Il a donc pour unique solution $X := A^{-1}B$.

Proposition

- (a) Soit $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ inversible. La matrice A^{-1} est inversible et $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.
- (b) Soit $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ inversible. La matrice ${}^t A$ est inversible et $\boxed{({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$.
- (c) Soient $A, B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ inversibles. La matrice AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.

Proposition

Soit $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible ;
- (ii) il existe $B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$;
- (iii) il existe $C \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ tel que $CA = I_n$;
- (iv) il existe une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes qui envoie A sur I_n .

Dans les cas (ii) à (iv), on a respectivement : $A^{-1} = B$, $A^{-1} = C$, et A^{-1} est l'image de I_n par la suite finie d'opérations élémentaires.

Algorithme (calcul de l'inverse d'une matrice par la « méthode de Gauss-Jordan »)

On suppose que A est inversible. On va construire A^{-1} par des opérations sur les lignes de A .

On applique la méthode de Gauss sans échange de colonnes sur A dans $(A|I)$ en travaillant colonne par colonne de la gauche vers la droite pour faire apparaître des zéros en dehors de la diagonale. Une dernière étape permet de faire apparaître I à gauche de la barre verticale.

On utilise une construction par récurrence. On s'intéresse à la j^{e} ligne à l'étape $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$(i) \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & \dots & 0 & \square \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & d_{j-1} & \vdots \end{array} \right) \quad (ii) \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & \dots & 0 & \square \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & d_j & \square \end{array} \right) \quad (iii) \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & \dots & 0 & \square \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & d_j & \square \end{array} \right).$$

- (i) On choisit dans la j^{e} colonne à gauche de la barre verticale un coefficient $d_j \neq 0$ (existe).
- (ii) On échange la j^{e} ligne de la matrice augmentée avec la ligne contenant d_j .
- (iii) On amène des 0 strictement au-dessus et au-dessous de d_j par des opérations sur les lignes de la matrice augmentée de la forme $L_i \leftarrow c_i L_i + c_j L_j$ avec $c_i \neq 0$ quand $i \neq j$.

En fin de calcul on divise chacune des lignes de la matrice augmentée par son coefficient d_j . La matrice A^{-1} est la matrice qui se trouve à droite de la barre verticale.

Définition

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note : $\text{rg } A := \text{rg} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}} \right) \in \mathbb{N}$.

sera défini plus tard \rightarrow utiliser l'algorithme qui suit en attendant

Algorithme

On transforme ${}^{x_1 \dots x_p} A := \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \\ a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ en ${}^{x_{j_1} \dots x_{j_p}} A' = \begin{pmatrix} x_{j_1} & \dots & x_{j_r} & x_{j_{r+1}} & \dots & x_{j_p} \\ d_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_r & \dots & \dots \\ \hline 0 & \dots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$

par la méthode de Gauss, avec $d_1 \neq 0, \dots, d_r \neq 0$.

On a : $\boxed{\text{rg } A = r}$ « calcul du rang par la méthode de Gauss ».

(Le nombre r est donc indépendant de la manière dont on applique la méthode de Gauss.)

Proposition

Soit $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$.

On a : A est inversible si et seulement si $\text{rg } A = n$.

Proposition Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a : $\text{rg} ({}^t A) = \text{rg} (A)$.