

Suites et séries : à retenir (J-Y D)

Définition

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes (ce qui se note « $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ») et $l \in \mathbb{C}$.

(a) On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers l si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - l| < \epsilon).$$

Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée.

(b) On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies u_n > A).$$

(resp. $-\infty$)
(resp. $u_n < -A$)

Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée.

Définition-Proposition

(a) Une *suite extraite* de $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ où $(n_k)_{k \geq 0}$ est strictement croissante dans \mathbb{N} . Dans ce cas, si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors $u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l$.

(b) Toute suite réelle bornée a une suite extraite convergente « th. de Bolzano-Weierstrass ».

Proposition

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$, $(v_n)_{n \geq 0}$, $(w_n)_{n \geq 0}$ des suites dans \mathbb{R} , $u, w \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $l \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\begin{cases} u_n \leq w_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \text{ et } w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w \end{cases}$ alors $u \leq w$ « prolongement des inégalités larges ».

(b) Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{R}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \text{ et } w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \end{cases}$ alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ « théorème des gendarmes ».

(c) Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ (resp. } v_n \leq w_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ (resp. } w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty) \end{cases}$ alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (resp. $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$).

Théorème (« théorème des suites monotones »)

Toute suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ qui est croissante (resp. décroissante) possède une limite qui est réelle si $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée (resp. minorée) et vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$) sinon.

Théorème (« théorème des suites adjacentes »)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites de nombres réels telles que :

$(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante, $(v_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, et $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, et $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition-Proposition (« suite définie par une relation de récurrence »)

(a) Soient A un ensemble, $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications de A dans A , et $\alpha \in A$.

Il existe une unique suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A telle que :

$$x_0 = \alpha \quad \text{et} \quad x_{n+1} = F_n(x_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(b) On considère un intervalle I , une application $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$a \in I, \quad f(a) \in I, \quad f(f(a)) \in I, \quad \dots^{(*)} \quad \leftarrow [\text{par exemple } f(I) \subseteq I \text{ et } a \in I]$$

Il existe une unique suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels telle que :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad (\text{sous-entend que } u_n \in I) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad \leftarrow [\text{on note parfois : } u_n = f^n(a)]$$

Dans ce cas : si f est continue et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ avec $l \in I$, alors $f(l) = l$.

(1) On suppose que f croît et que $\alpha \in I$ vérifie $f(\alpha) = \alpha$.
 (a) On a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ pour $n \geq 1$.
 Donc : - si $f(a) - a \geq 0$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ croît ;
 - si $f(a) - a \leq 0$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ décroît.
 (b) On a aussi : $u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$ pour $n \geq 0$.
 Donc : - si $a \leq \alpha$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par α ;
 - si $a \geq \alpha$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par α .

(2) On suppose que f est décroît et que $\beta \in I$ vérifie $f(\beta) = \beta$.
 On note $g := f \circ f$, $v_n := u_{2n}$ et $w_n := u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
 On a : $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$ pour tout $n \geq 0$.
 Comme g est croissante et $g(\beta) = \beta$, on est ramené au cas (1).
 De plus : - si $g(a) - a \geq 0$ alors $g(f(a)) - f(a) \leq 0$;
 - si $g(a) - a \leq 0$ alors $g(f(a)) - f(a) \geq 0$.
 Ainsi : les suites $(v_n)_{n \geq 0}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ varient en sens contraire.
 Elles vérifient : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta \iff v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$ et $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$.

(*) Cela signifie que $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{f^n}$ où $(f^n)_{n \geq 0} := (x_n)_{n \geq 0}$ du (a) avec $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ égal à l'ensemble des (graphes d')applications $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_n(g) = g \circ f$. On applique (a) avec cette fois-ci $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{f^n}$ et $F_n(x) = f(x)$.

Proposition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère $(L): u_{n+1} + au_n = b$ d'inconnue $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $(u_n)_{n \geq 0}$ de (L) telle que :

$$u_0 = \alpha. (*)$$

(b) On considère l'équation homogène $(H): u_{n+1} + au_n = 0$ d'inconnue $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On note r la solution dans \mathbb{R} de l'équation $r + a = 0$.

Les solutions de (H) s'écrivent de manière unique comme suites géométriques sous la forme :

$$u_n = \lambda r^n \quad \text{pour } n \geq 0, \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) On pose : $m = 0$ si $1 + a \neq 0$ et $m = 1$ si $1 + a = 0$.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_P := (kn^m)_{n \geq 0}$ est une solution de (L) .

Une fois u_P fixé, les solutions de (L) s'écrivent de manière unique sous la forme :

$$(u_n)_{n \geq 0} = u_H + u_P \quad \text{où } u_H \text{ est une certaine solution de } (H).$$

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère $(L): u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c$ d'inconnue $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution $(u_n)_{n \geq 0}$ de (L) telle que :

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad u_1 = \beta. (**)$$

(b) On considère l'équation homogène $(H): u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ d'inconnue $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On note r_1 et r_2 les solutions dans \mathbb{C} de son « équation caractéristique » $r^2 + ar + b = 0$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{– si } r_1, r_2 \in \mathbb{R} : v_n = r_1^n \quad \text{et} \quad w_n = \begin{cases} r_2^n & \text{si } r_2 \neq r_1 \\ nr_1^{n-1} & \text{si } r_2 = r_1 \end{cases};$$

$$\text{– sinon : } v_n = \rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad w_n = \rho^n \sin(n\theta) \quad \text{où } r_1 = \rho e^{i\theta} \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}, \text{ et } r_2 = \overline{r_1}.$$

Les solutions de (H) s'écrivent de manière unique sous la forme :

$$u_n = \lambda v_n + \mu w_n \quad \text{pour } n \geq 0, \text{ pour certains } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

(c) On note m la multiplicité de 1 pour le polynôme $X^2 + aX + b$.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_P := (kn^m)_{n \geq 0}$ est une solution de (L) .

Une fois u_P fixé, les solutions de (L) s'écrivent de manière unique sous la forme :

$$(u_n)_{n \geq 0} = u_H + u_P \quad \text{où } u_H \text{ est une certaine solution de } (H).$$

Définition-Proposition

(a) On appelle *série de nombres complexes* une suite $(u_n, \sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ avec $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, notée $(\sum u_n)_{n \geq 0}$. Elle converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \geq 0} := (\sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ converge.

(b) Soit $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ une série convergente dans \mathbb{C} . On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$.

(c) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs. On note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k \leq +\infty$.

(d) On dit qu'une série $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{C} est *absolument convergente* si : $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Proposition

(a) Si une série $(\sum u_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{C} converge, on a :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \leq +\infty.$$

(b) Toute série absolument convergente dans \mathbb{C} est convergente.

Exemple

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La « série de Riemann » $(\sum \frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(1) On suppose que $\alpha \leq 1$.
 Pour tous $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t \in [k, k+1]$, on a : $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{t} \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$.
 Donc : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

(2) On suppose que $\alpha > 1$.
 Pour tous $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $t \in [k-1, k]$, on a : $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$.
 Donc : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{\alpha-1}$.

(*) On pose $f(x) = -ax + b$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a : $(L) \iff \forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

(**) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$: (L) et $(\forall n \geq 0 \quad v_n = u_{n+1}) \iff \forall n \geq 0 \quad X_{n+1} = f(X_n)$.