

Déterminants sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} : survol L1 & L2 (J-Y D)

On fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Définition-Proposition

(a) Il existe une unique application $\det: \mathfrak{M}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, appelée *déterminant*, telle que :

- (i) $\det A' = -\det A$ quand A' se déduit de A par $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$;
- (ii) $\det A' = c \det A$ quand A' se déduit de A par $L_i \leftarrow cL_i$ avec $c \in \mathbb{K}$ (par exemple 0) ;
- (iii) $\det A' = \det A$ quand A' se déduit de A par $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ avec $i \neq j$ et $c \in \mathbb{K}$;
- (iv) $\det I_n = 1$.

(b) Cette application \det , appelée *déterminant*, vérifie aussi :

(v) $\det A = \det A' + \det A''$ quand $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L'_{i_0} + L''_{i_0} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ avec $A' = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L'_{i_0} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ et $A'' = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L''_{i_0} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$;

(vi) $\det A = d_1 \cdots d_n$ quand $A = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Remarque

Soient $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. En factorisant successivement chaque ligne de A par λ , on obtient grâce à l'égalité (ii) ci-dessus : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Notations

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$. On note $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ les colonnes de A .

On pose : $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $\det(v_1, \dots, v_n) := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Corollaire

Soient $A, B \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ et $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$.

- (a) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
- (b) La famille (v_1, \dots, v_n) est libre si et seulement si $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.
- (c) On a : $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- (d) On a : $\det({}^t A) = \det A$.

Remarques

On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n .

On se donne $v_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,1} e_i \in \mathbb{K}^n$ et ... et $v_n = \sum_{i=1}^n a_{i,n} e_i \in \mathbb{K}^n$.

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice qui a pour colonnes v_1, \dots, v_n .

1. Compte tenu de la définition-proposition du début, on déduit du (d) du corollaire que :

- (i) $\det(v_1, \dots, v_n) = \alpha' \det(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v'_{i_0}, v_{i_0-1} v_n) + \alpha'' \det(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v''_{i_0}, v_{i_0-1} v_n)$
quand $v_{i_0} = \alpha' v'_{i_0} + \alpha'' v''_{i_0}$ avec $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, $v'_{i_0}, v''_{i_0} \in \mathbb{K}^n$ et $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{K}$;
- (ii) $\det(v_1, \dots, v_n)$ change de signe lorsqu'on échange v_i et v_j avec $i \neq j$;
- (iii) $\det(v_1, \dots, v_n)$ ne change pas lorsqu'on remplace v_i par $v_i + cv_j$ avec $i \neq j$ et $c \in \mathbb{K}$.

2. On note S_n l'ensemble des bijections σ de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, n\}$.

On a : $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})}_{\text{noté } \varepsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$.

3. Le rang de A est l'ordre maximal des déterminants extraits non-nuls de A par suppression de lignes (ici d'indices i_1, \dots, i_{n-r}) et de colonnes (ici d'indices autres que j_1, \dots, j_r).

Proposition

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$.

À chaque $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on associe d'une part le signe $(-1)^{i+j}$ extrait de $\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ et d'autre part la matrice A_{ij} obtenue en supprimant dans A la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.

(a) On a : $\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$
« développement suivant la j^{e} colonne ».

(b) On a : $\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$
« développement suivant la i^{e} ligne ».

Exemples

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

• On a : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ en développant par rapport à C_1 .

De plus : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ quand $ad - bc \neq 0$ (vérification immédiate).

• On a : $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{dév.} / L_3}{=} +(-2) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -9.$

• $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{factoriser } L_2, L_3 \\ \text{puis dév.} / C_1}}{=} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$

Notation

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$. On lui associe sa *comatrice* :

$$\text{Com } A := ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

où A_{ij} est obtenue en supprimant dans A la i^{e} ligne et la j^{e} colonne.

Proposition

Soit $A \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$.

On a : ${}^t(\text{Com } A)A = A {}^t(\text{Com } A) = (\det A)I_n$.

En particulier, lorsque A est inversible on a : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(\text{Com } A)$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(2, \mathbb{K})$. On suppose A inversible.

On a : $\text{Com } A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, donc $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Proposition

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Le système $(E) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ a une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$.

Dans ce cas, cette solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \text{ et } \dots \text{ et } x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \text{ « formules de Cramer ».}$$