Méthode de Gauss (J-Y D)

On considère un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues réelles :

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \quad\quad ... & \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{np}x_p & = b_n \end{array}\right. \qquad \text{d'inconnue } (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$$

où sont donnés $a_{11},..., a_{1p}, a_{21},..., a_{2p}, \ldots, a_{n1},..., a_{np} \in \mathbb{R}$ et $b_1,..., b_n \in \mathbb{R}$.

Notations

On utilisera les « matrices » suivantes : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \;...\; a_{1p} \\ ... \\ a_{n1} \;...\; a_{np} \end{pmatrix}$ *matrice de* (E), $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ *inconnue de* (E) et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *second membre de* (E). On écrira en abrégé $(E) : AX = B$.

La *matrice augmentée* de (E) est la matrice $(A|B) := \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \;...\; a_{1p} & b_1 \\ ... & \vdots \\ a_{n1} \;...\; a_{np} & b_n \end{array}\right)$, où la barre verticale n'a aucune signification mathématique. On résoudra (E) en travaillant sur les lignes de $(A|B)$ et sur les colonnes de A.

Définition

Dans ce qui suit on va noter L_1, ..., L_n les lignes de A et C_1, ..., C_p les colonnes de A. Étant donnés $k \in \{1, ..., n\}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, on écrira « $L_k \leftarrow \alpha_1 L_1 + ... + \alpha_n L_n$ » pour exprimer qu'on remplace la ligne L_k par $\alpha_1 L_1 + ... + \alpha_n L_n$.

Une *opération élémentaire sur les lignes de* A est une des transformations suivantes : $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$, $L_i \leftarrow c\, L_i$ avec $c \neq 0$, $L_i \leftarrow L_i + cL_j$ avec $i \neq j$ et $c \in \mathbb{R}$.

Un *échange de deux colonnes* de A est une transformation $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$.

Proposition (« pivot total »)

a) On peut passer par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes et d'échanges de deux colonnes, de la matrice A à une matrice de la forme

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|ccc} d_1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & d_r & & & \\ \hline 0 & & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \quad \text{avec } d_1 \neq 0, ..., d_r \neq 0.$$

b) Le système $(E) : AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ équivaut au système $(E') : A'X' = B'$ d'inconnue $X' := \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_p} \end{pmatrix}$, où les transformations du (a) envoient $\big(\overset{x_1 \,...\, x_p}{A} \;|\, B \,\big)$ sur $\big(\overset{x_{j_1} \,...\, x_{j_p}}{A'} \;|\, B' \,\big)$.

[Noter que les lettres qui se trouvent au-dessus de A ou de A' représentent ici les noms des variables-coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et non pas les valeurs particulières qu'elles prennent pour le vecteur X. De plus, ce sont les éventuels échanges de colonnes qui feront passer de $x_1, ..., x_p$ à $x_{j_1}, ..., x_{j_p}$.]

c) On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$.

On a : $\quad \mathscr{S}_E \neq \emptyset \iff \underbrace{b'_{r+1} = \cdots = b'_n = 0}_{n-r \text{ conditions}}$.

Dans ce cas, on obtient une équation paramétrique de $\mathscr{S}_E$ à partir de (E') en écrivant successivement x_{j_r}, ..., x_{j_1} en fonction des paramètres $\underbrace{t_1 := x_{j_{r+1}}, ..., t_{p-r} := x_{j_p}}_{p-r \text{ paramètres}}$.

Ainsi, quand $r = n = p$ (« système de Cramer ») le système (E) a une unique solution, et quand $B = 0$ (« système homogène ») avec $p > n$ le système (E) a une infinité de solutions.

Exemple

Dans les calculs qui vont suivre, il faut garder en tête qu'à chaque étape de la méthode de Gauss correspond une équivalence entre les systèmes d'équations linéaires associés.

En pratique, on exploitera la proposition précédente en allégeant la présentation :
– lorsque $B = 0$ on ne fera pas apparaître la dernière colonne (seconds membres nuls) ;
– on n'introduira les noms des variables au dessus des p premières colonnes qu'à partir du moment où un échange de colonnes aura été introduit (ce qui est rarement indispensable) ;
– on travaillera (par exemple) colonne par colonne en acceptant, au moment du travail sur la $j^{\text{ème}}$ colonne, de faire simultanément plusieurs transformations sur les lignes de la forme $L_i \leftarrow c_i L_i + c_j L_j$ avec $c_i \neq 0$ et $i > j$ (car on est capable de décomposer effectivement ces transformations en successions d'opérations élémentaires sur les lignes) ;
– on résoudra « de tête » le système triangulaire correspondant à la dernière étape de la méthode de Gauss, en partant de la dernière égalité et remontant vers la première.

Voici le système que nous allons résoudre pour illustrer la méthode de Gauss :

$$(E) \quad \left\{\begin{aligned} 4x+2y+z&=5 \\ 2x+y+z&=4 \\ -2x-y+2z&=5 \end{aligned}\right. \quad \text{d'inconnue } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

On procède ainsi :

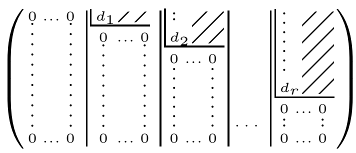
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_3]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

En renommant dans la conclusion la variable y en t, et calculant d'abord z puis ensuite x, on obtient l'équation paramétrique suivante de l'ensemble $\mathscr{S}_E$ des solutions de (E) :

$$\mathscr{S}_E : \left\{\begin{array}{ll} x = & \frac{1}{4}(5-3-2t) = -\frac{t}{2}+\frac{1}{2} \\ y = & t \\ z = & 3 \end{array}\right. , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Variante sans échange de colonnes (« pivot partiel »)

(a) Une *matrice échelonnée* — suivant les lignes — est une matrice telle que le nombre de termes nuls au début de chaque ligne augmente lorsqu'on passe d'une ligne à la suivante, et ce nombre augmente même strictement lorsqu'on passe d'une ligne non nulle à la suivante.

Il s'agit d'une matrice de la forme  avec $d_1 \neq 0$, ..., $d_r \neq 0$.

[En appliquant à A les opérations élémentaires sur les lignes — mais pas sur les colonnes — qui ont permis de passer de A à une matrice A' en travaillant colonne par colonne et n'échangeant deux colonnes que lorsque c'est nécessaire, on obtient une matrice échelonnée. Réciproquement, une matrice échelonnée déduite de A fournit une A' par échange de colonnes.]

(b) Une *matrice échelonnée réduite* est une matrice échelonnée dans laquelle les premiers termes non-nuls sur chaque ligne sont des 1 au-dessus desquels se trouvent des 0.

Il existe une unique matrice échelonnée réduite E_A qui se déduit de A par des opérations élémentaires sur les lignes. Elle s'obtient par exemple ainsi :