

# TD ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

## N.B.

La difficulté de chaque exercice est indiquée par le nombre d'astérisques : il va d'une \* pour les exercices d'application directe du cours, à quatre \*\*\*\* pour les exercices plus abstraits ou mélangeant différentes notions

## LA DIVISIBILITÉ ENTRE ENTIERS

### Vocabulaire :

Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$ . On dit que  $a$  **divise**  $b$ , ou que  $a$  est un **diviseur** de  $b$ , ou encore que  $b$  est un **multiple** de  $a$ , si et seulement s'il existe  $q \in \mathbb{Z}$  tel que  $b = aq$ .

### Question 1 \*

Trouver le plus petit entier naturel divisible par tous les nombres entre 1 et 10.

### Question 2 \*\*

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers. Montrer que l'un des entiers

$$a, b, a + b, a - b$$

est nécessairement un multiple de 3.

### Question 3 \*

Soit  $n$  un nombre entier à  $k + 1$  chiffres. Le nombre  $n$  s'écrit en base dix sous la forme

$$r_k r_{k-1} r_{k-2} \cdots r_2 r_1 r_0$$

où l'on a juxtaposé les  $k + 1$  chiffres de  $n$  les uns après les autres. L'écriture ci-dessus est appelée l'écriture décimale de  $n$ , et elle sous-entend que

$$n = r_k \cdot 10^k + r_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + r_2 \cdot 100 + r_1 \cdot 10 + r_0.$$

Par exemple, l'écriture décimale du numéro de l'année est 2026.

Justifier les affirmations suivantes :

1. Un nombre  $n$  est divisible par 2 si, et seulement si son dernier chiffre  $r_0$  est divisible par 2.
2. Un nombre  $n$  est divisible par 5 si, et seulement si son dernier chiffre  $r_0$  est 0 ou 5.
3. Un nombre  $n$  est divisible par 10 si, et seulement si son dernier chiffre  $r_0$  est 0.
4. Un nombre  $n$  est divisible par 4 si, et seulement si le nombre  $r_1 r_0$  formé par des deux derniers chiffres est divisible par 4.

5. Un nombre  $n$  est divisible par 25 si, et seulement si le nombre  $r_1 r_0$  formé par des deux derniers chiffres est divisible par 25.

### Question 4 \*

Soit  $n$  un nombre entier à  $k + 1$  chiffres, écrit en base dix sous la forme

$$r_k r_{k-1} r_{k-2} \cdots r_2 r_1 r_0$$

1. Formuler un critère de divisibilité par 3
2. Formuler un critère de divisibilité par 4
3. Formuler un critère de divisibilité par 6
4. Formuler un critère de divisibilité par 7
5. Formuler un critère de divisibilité par 9
6. Formuler un critère de divisibilité par 11

### Question 5 \*

Résoudre les exercices suivants en développant le critère de divisibilité approprié :

1. Déterminer la plus grande puissance de 2 qui divise chacun des nombres suivants :

$$201984, \quad 1987776, \quad 89375744.$$

2. Déterminer la plus grande puissance de 5 qui divise chacun des nombres suivants :

$$951675, \quad 1987705, \quad 8937500.$$

3. Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 3 et 9 :

$$3019071, \quad 5501100222, \quad 971022001.$$

4. Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 11 :

$$1127371, \quad 2790906437, \quad 1001001.$$

5. Tester les nombres suivants pour la divisibilité par 7 et par 13 :

$$1912911, \quad 371293, \quad 491220639.$$

**Propriétés élémentaires :**

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des entiers. Montrer les propriétés suivantes, à titre d'exercice :

1. Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $c$  alors  $a$  divise  $c$ .
2. Si  $a$  divise  $b$  et  $b$  divise  $a$  alors  $a = \pm b$ .
3. Si  $a$  divise  $b$  et  $c$  alors  $a$  divise  $b + c$ .
4. Si  $a$  divise  $b$  alors  $a$  divise  $bc$ .
5. Si  $a$  divise  $b$  alors  $ac$  divise  $bc$ .

**Question 6 \***

On considère trois nombres dont l'écriture en base dix est

$abc$ ,  $abb$ ,  $acc$ . Montrer que la somme de ces trois nombres est un nombre divisible par 3

**Question 7 \***

On considère deux nombres dont l'écriture en base dix est  $cba$  et  $bba$ . Proposer un troisième nombre de trois chiffres uniquement formé avec les chiffres  $a, b, c$  pour que la somme des trois nombres soit divisible par 3.

**Question 8 \*\***

Trouver un nombre entier  $n$  à trois chiffres, tel que  $n$  soit un multiple de 5 et de 14, et que la somme des chiffres de  $n$  soit égale à 14.

---

## LA DIVISION EUCLIDIENNE

---

**Question 9 \***

Une girouette indique le Nord quand un coup de vent la fait tourner dans le sens horaire de 14060 degrés. Quelle direction indique-t-elle maintenant ?

**Question 10 \*\***

On dispose d'un rectangle dont les dimensions, exprimées en centimètres, sont  $L = 126$  et  $l = 90$ . On désire paver ce rectangle avec des carrés de la façon suivante :

- tous les carrés doivent être identiques ;
- on souhaite utiliser le moins de carrés possibles.

Quelles sont les dimensions des carrés que l'on doit choisir pour faire ce pavage ?

Combien va-t-on utiliser de carrés ?

**Question 11 \*\***

On range 461 pots de yaourts dans des caisses. La règle est qu'on ne commence une nouvelle caisse que quand la précédente est pleine. A la fin, on a rangé les pots dans 14 caisses.

- Combien de pots contiennent les caisses pleines ?
- Combien de pots contient la dernière caisse ?

**Théorème de la division Euclidienne.**

Pour tous entiers naturels  $a$  et  $b$ , avec  $b \neq 0$ , il existe deux uniques entiers naturels  $(q, r)$  qui vérifient

$$\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b. \end{cases}$$

On appelle

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow \text{le dividende} & q \rightarrow \text{le quotient} \\ b \rightarrow \text{le diviseur} & r \rightarrow \text{le reste.} \end{array}$$

**Question 12 \***

Dire laquelle de ces écritures est une application du Théorème de la division Euclidienne, pour  $a = 30$  et  $b = 7$  :

$$\begin{array}{ll} 30 = 1 \times 7 + 23, & 30 = 2 \times 7 + 16, \\ 30 = 4 \times 7 + 2, & 30 = 3 \times 7 + 9. \end{array}$$

**Question 13 \***

Trouver le quotient et le reste pour les couples d'entiers suivants. Calculatrices non autorisées !

- (a)  $a = 778$  et  $b = 10$ .
- (b)  $a = 1058$  et  $b = 7$ .
- (c)  $a = 3442$  et  $b = 31$ .
- (d)  $a = 20038$  et  $b = 106$ .

# LES CONGRUENCES

## Question 14 \*

Remplir les espaces blancs par le modulo :

$$\begin{aligned} 55 &= \dots \pmod{7} \\ 2048 &= \dots \pmod{3} \\ 406 &= \dots \pmod{1056} \end{aligned}$$

**Important :**

Les deux propriétés sont équivalentes :

- $m$  divise  $a - b$ .
- $a$  et  $b$  ont le même reste dans la division par  $m$ .

## Question 15 \*\*

Soient  $a, b, c, d, n, m$  des entiers. Démontrer les propriétés suivantes :

- (a) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , alors  $b \equiv a \pmod{n}$ .
- (b) Si  $a \equiv b \pmod{n}$  et  $b \equiv c \pmod{n}$ , alors  $a \equiv c \pmod{n}$ .
- (c) Si  $a \equiv c \pmod{n}$  et  $b \equiv d \pmod{n}$ , alors  $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ .
- (d) Si  $a \equiv c \pmod{n}$  et  $b \equiv d \pmod{n}$ , alors  $a \cdot b \equiv c \cdot d \pmod{n}$ .
- (e) Si  $a \equiv b \pmod{n}$ , alors  $m \cdot a \equiv m \cdot b \pmod{m \cdot n}$ .

## Question 17 \*\*

Utilisez les propriétés de congruence de l'exercice précédent dans les questions suivantes.

(a) On suppose que  $X \equiv 6 \pmod{7}$  and  $Y \equiv 16 \pmod{7}$ . Calculer les congruences suivantes :

$$\begin{aligned} X + Y &\equiv \dots \pmod{7} \\ X - Y &\equiv \dots \pmod{7} \\ Y - X &\equiv \dots \pmod{7} \\ X \times Y &\equiv \dots \pmod{7} \end{aligned}$$

- (b) Calculer le reste de la division de  $46 \times 23$  par 7
- (c) Calculer  $13^8 \pmod{7}$
- (d) Calculer  $2^{123} \pmod{29}$

## Question 16 \*\*

Prouver le résultat ci-dessous.

## Question 18 \*\*

Trouver les couples d'entiers  $n$  et  $m$  tels que la somme  $n+m$  est égale à 76 et le quotient de la division euclidienne de  $m$  par  $n$  est égal à 9 (pas d'informations sur le reste).

# PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN (PGCD)

## Question 19 \*

Puisque  $2391 = 23 \cdot 100 + 91$ , décider si

$$\text{PGCD}(2391, 23) = \text{PGCD}(91, 23).$$

Aucun calcul n'est requis!

## Question 20 \*\*

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer les suivants :

- (a)  $\text{PGCD}(1064, 700)$
- (b)  $\text{PGCD}(4567, 91837)$
- (c)  $\text{PGCD}(1583890, 3927)$ .

Ensuite, pour les couples  $(a, b)$  précédents trouver des entiers  $x$  et  $y$  tels que  $\text{PGCD}(a, b) = xa + yb$ .

## Question 21 \*

Deux entiers  $a, b$  sont dits premiers entre eux, si leur PGCD est égal à 1.

Dire, en justifiant votre réponse, si les entiers suivants sont premiers entre eux :

- (a) 8 et 14 : .....
- (b) 27 et 200 : .....
- (c) 2048 et 2187 : .....

## Question 22 \*

Trouver l'entier positif  $n$  tel que  $\text{PGCD}(n, 527) = 17$  et  $\text{ppcm}(n, 527) = 13702$ .

**Question 23 \*\***

Trouver tous les nombres entiers  $a$  et  $b$  dont la somme est 256 et dont le PGCD est 16.

**Question 24 \*\***

Trouver tous les nombres entiers  $a$  et  $b$  dont le produit est

1734 et dont le PGCD est 17.

**Question 25 \***

Trouver deux entiers positifs  $n$  et  $m$  différents de 47 et 2820 tels que  $\text{PGCD}(n, m) = 47$  et  $\text{ppcm}(n, m) = 2820$

---

## NOMBRES PREMIERS, FACTEURS PREMIERS, PREMIERS ENTRE EUX

---

**Question 26 \***

En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver  $u$  et  $v$  tels que  $185u + 401v = 1$ .  
Que peut-on dire de 185 et 401 ?

**Question 27 \***

Décomposer en produits de nombres premiers les entiers 119, 121, 123, 125, 127  
Faire de même avec 43, 143, 243, 343, 443.

**Question 28 \***

Décomposer en produits de facteurs premiers 1197 et 210.  
Retrouver ainsi leur PGCD et leur ppcm.  
Faire de même avec 12740 et 168.

**Question 29 \***

Le nombre 3737 est-il premier ? Un nombre de la forme  $abab$  peut-il être premier ? Justifier.

**Question 30 \*\***

Montrer que pour tout entier  $n$  les nombres  $2n + 1$  et  $9n + 4$  sont premiers entre eux.

**Coefficient Binomial**

Les coefficients binomiaux, définis pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ , avec  $k \leq n$ , donnent le nombre de parties de  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments. On les note  $\binom{n}{k}$  (« $k$  parmi  $n$ ») ou  $C_n^k$  («combinaison de  $k$  parmi  $n$ »).

Ils s'expriment ainsi à l'aide de la fonction factorielle :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Question 31 \*\***

Montrer que, pour tout entier  $p$  premier et  $1 \leq k \leq p - 1$ , le nombre  $p$  divise le coefficient binomial  $C_p^k$ .

---

## EQUATIONS DIOPHANTIENNES

---

**L'équation Diophantienne  $ax + by = c$** 

On considère l'équation Diophantienne  $ax + by = c$ .  
Soient  $a$  et  $b$  premiers entre eux, et  $c = 1$ .

1. Que dit le théorème de Bachet-Bézout dans cette situation ?
2. On considère une solution particulière  $(x_0, y_0)$ . Comment décrire l'ensemble des solutions ?

Si maintenant  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux :

1. Si on suppose que  $\text{PGCD}(a, b) \mid c$ , que peut-on dire de plus ?
2. Et si n'est pas vrai ?

**Question 32 \***

Déterminer si les équations suivantes ont des solutions dans  $\mathbb{Z}$ . Dans le cas affirmatif, les expliciter.

(a)  $3x + 2y = 4$

(b)  $5x + 13y = 6$

(c)  $504x + 1188y = 144$

---

 POUR ALLER PLUS LOIN
 

---

## La division euclidienne

**Question 33 \*\*\***

On effectue la division euclidienne d'un entier naturel  $a$  par 38. On trouve un quotient  $q$  et un reste égal à  $4q^2 - 4$ . Donner les valeurs possibles pour  $a$  et expliciter les divisions euclidiennes correspondantes.

## Les congruences

**Question 35 \*\*\*\***

Trois entiers naturels  $a, b$  et  $c$  vérifient la relation de Pythagore

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Donner deux exemples de tels triplets.

Montrer que :

- l'un au moins des nombres  $b$  et  $c$  est multiple de 3
- l'un au moins des nombres  $a, b, c$  est multiple de 5

## Le plus grand commun diviseur

**Question 37 \*\*\***

Soient  $a$  et  $b$  entiers non nuls. On suppose que  $a^2 - b^2 = 2916$  et  $\text{PGCD}(a, b) = 18$ . Déterminer  $a$  et  $b$ .

**Question 38 \*\*\***

En divisant le nombre  $a$  par 122 et par 125 on trouve le même quotient, et des restes respectifs de 52 et 40. Calculer  $a$ .

En divisant 6732 et 564 par un même nombre  $b$  on trouve les restes respectifs de 24 et 18. Quel peut être le nombre  $b$  ?

## Nombres premiers, facteurs premiers, premiers entre eux

**Question 41 \*\*\***

Montrer que pour tout entier  $n$  la fraction est irréductible :

$$\frac{12n + 1}{30n + 2}$$

**Question 42 \*\*\***

A quelle condition le PGCD de  $2n + 3$  et de  $n + 7$  est-il égal à 1 ?

**Question 34 \*\*\***

On divise un entier  $a$  par 15, le reste est 3. Quel est le reste de la division de  $a$  par 5 ?

Même question si le reste est 13.

On divise un entier  $a$  par 5, le reste est 3. Quel peut être le reste de la division par 15 ?

- l'un au moins des nombres  $b$  et  $c$  est multiple de 2

**Question 36 \*\*\***

Montrer que quel que soit l'entier  $n$

- $4^{3n} - 4^n$  est multiple de 5
- $3^{2n} - 2^n$  est multiple de 7
- $4^n + 15n - 1$  est multiple de 9
- $3 * (5^{2n+1}) + 2^{3n+1}$  est multiple de 17

**Question 39 \*\*\*\***

Si  $a$  et  $b$  sont premiers relatifs, non tous les deux nuls, trouver le  $\text{PGCD}(a^2 + b^2, a + b)$ , en démontrant votre réponse.

**Question 40 \*\*\***

Montrer, en utilisant uniquement la définition du PGCD les propriétés suivantes :

- (a) Pour tout  $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ , on a  $\text{PGCD}(0, a) = |a|$ .
- (b) Pour tout  $a \in \mathbb{Z}$  on a  $\text{PGCD}(1, a) = 1$ .
- (c) Pour tout  $a, b \in \mathbb{Z}$  on a  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(|a|, |b|)$ .

**Question 43 \*\*\***

Trouver le PGCD de  $9n + 4$  et  $2n - 1$  en fonction de  $n$ .

**Question 44 \*\*\*\***

On considère deux sommes  $A = 11a + 2b$  et  $B = 18a + 5b$ .

- (a) Montrer que si 19 divise l'une des sommes, alors il divise l'autre aussi.
- (b) On suppose que  $\text{PGCD}(a, b) = 1$ , montrer que  $A$  et  $B$  ne peuvent avoir d'autres diviseurs communs que 1 et 19.