

TD POLYNÔMES

Note

La difficulté de chaque exercice est indiquée par un nombre plus ou moins élevé d'astérisques, et va de * pour des exercices d'application directe du cours à *** ou plus pour des exercices plus abstraits ou mélangeant différentes notions.

DEGRÉ, DIVISIBILITÉ ET DIVISION EUCLIDIENNE

Propriétés:

On désigne par \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Par convention on dit que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
NB : si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ on a toujours l'égalité.
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et le coefficient dominant de PQ est le produit des coefficients dominants de P et Q .

Exercice 1 *

On donne les polynômes suivants :

$$P(X) = 3X^2 - X + 1$$

$$Q(X) = 2X - 3X^2 + 2X^3 - 4$$

$$R(X) = X - 3X^2$$

Déterminer $\deg(P)$, $\deg(Q)$, $\deg(R)$, $\deg(PQ)$, $\deg(P + Q)$, $\deg(P + R)$.

Exercice 2 **

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul à coefficients réels, et d un entier. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies quel que soit P ?

- Si le degré de P est 2, alors celui de $X^2 + P$ est 2.
- Si le degré de P est 4, alors celui de $X^2 + P$ est 4.
- Si le degré de P est d , alors celui de X^2P est $2d$.
- Si le degré de P est d , alors celui de $P(X^2)$ est $2d$.
- Si le degré de P est d , alors celui de $X^2P(X + 2)$ est $d + 2$.

Théorème:

Soient A et $B \neq 0$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Q et R sont appelés quotient et reste de la division euclidienne de A par B .

Exercice 3 *

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

- $A = X^4 - X^3 + X^2 - X$ et $B = X^2 - 1$;

- $A = X^5 - X^3 + 1$ et $B = X^3 - 2X^2 + X - 1$;

- $A = X^6 + 1$ et $B = X^2 + X + 1$.

Exercice 4 *

Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

- $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^2 + 1$;

- $A = X^3 - 1$ et $B = X + 2$;

- $A = X^4 + 1$ et $B = X^2 - \sqrt{2}X + 1$;

- $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$;

- $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$;

- $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$;

- $A = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1$ et $B = X^2 + iX + 1$;

- $A = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$ et $B = X^2 + (1 - i)X + 1 + i$;

Exercice 5 **

À quelles conditions sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + aX^2 + bX + c$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 6 **

Proposition:

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X - a$ est $P(a)$.

Trouver le reste de la division euclidienne de X^{50} par $X^2 - 3X + 2$.

[Indication : Commencer par calculer les restes de la division euclidienne de X^{50} par $X - 1$ et par $X - 2$.]

RACINES, FACTORISATION DANS $\mathbb{R}[X]$ ET $\mathbb{C}[X]$

Exercice 7 **

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies quel que soit P ?

1. Si P est divisible par $X^2 - X$ alors $P(1) = 0$.
2. Si P est divisible par $X^2 - X$ alors $P'(0) = 0$.
3. Si P est divisible par $(X - 1)^2$ alors $P'(1) = 0$.
4. Si $P(1) = P'(1) = 0$ alors P est divisible par $(X - 1)^2$.
5. Si $P'(1) = 0$ alors P est divisible par $(X - 1)$.
6. Si P est irréductible alors P ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
7. Si P est irréductible alors P' est de degré 0 ou 1.
8. Si P ne s'annule pas sur \mathbb{R} , alors P est irréductible.

Exercice 8 *

Factoriser le polynôme P sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ pour :

1. $P = X^4 - 1$;
2. $P = X^5 + X$;
3. $P = X^3 - 3$;
4. $P = X^3 + 8$;
5. $P = X^6 + 1$;
6. $P = X^{12} - 1$;
7. $P = X^4 + X^2 + 1$;
8. $P = X^9 + X^6 + X^3 + 1$. [Indication : On pourra remarquer que $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X^3 + 1)(X^6 + 1)$.]

Exercice 9 *

Trouver une racine du polynôme $P(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$, puis décomposer P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10 *

Factoriser $A = X^4 - 2X^3 - X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ (en remarquant que 2 est racine).

Exercice 11 *

Résoudre l'équation $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$ (commencer par observer l'existence d'une solution imaginaire pure).

Exercice 12 **

Soit $P(X) = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P .
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.

Proposition:

Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont n racines distinctes du polynôme P dans \mathbb{K} , alors P est divisible par $\prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$.

Exercice 13 **

Montrer que le polynôme $X(X + 1)(2X + 1)$ divise le polynôme $A = (X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.

Proposition:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- α est racine d'ordre k de P ;
- α est racine de P et racine d'ordre $k - 1$ de P' ;
- $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice 14 *

Soit $T(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$. Montrer que $T(1) = T'(1) = 0$ et en déduire la décomposition de T en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 15 **

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + (-4 + 2i)X^3 + (12 - 8i)X^2 + (4 + 26i)X - 13$

1. Montrer que $-i$ est une racine de P . Préciser son ordre de multiplicité.
2. Calculer les racines de P .

Exercice 16 **

Après avoir vérifié qu'il admet -2 pour racine, factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme suivant :

$$P(X) = X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16$$

Théorème:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n.$$

Exercice 17 *

À l'aide de la formule de Taylor, développer le polynôme P en α pour :

1. $P(X) = 2X^3 + X^2 - X - 2$ et $\alpha = 1$;
2. $P(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 + 3$ et $\alpha = -2$.

Exercice 18 **

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $a_k \in \mathbb{K}, \forall 0 \leq k \leq n$ tels que

$$P = a_0 + a_1(X - \alpha) + \dots + a_n(X - \alpha)^n.$$

Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n, a_k = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$.

Exercice 19 **

Factoriser le polynôme $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Exercice 20 **

Soit $P = 2X^4 + 32$. Le polynôme P admet-il des racines dans \mathbb{R} ? Est-il irréductible dans \mathbb{R} ? S'il est réductible, factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21 **

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^2 \cos(\phi) + 1$ où ϕ est un réel donné.

Exercice 22 **

Soit $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

1. Montrer que $P(e^{i\pi/5}) = \frac{2}{1 - e^{i\pi/5}}$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^4 \cos(k\pi/5)$ et $\sum_{k=0}^4 \sin(k\pi/5)$.

Exercice 23 **

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$C_n = \sum_{p=0}^n \cos(px), S_n = \sum_{p=0}^n \sin(px).$$

1. Précisez les valeurs de C_n et S_n lorsque $x = 2\pi k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, calculer $C_n + iS_n$. En déduire les valeurs de C_n et S_n .

Exercice 24 **

Soit P un polynôme à coefficients réels. En notant R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$, montrer que $R(i) = P(i)$. En déduire que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $P(i) = 0$.

Montrer ce même résultat sans passer par le reste de la division euclidienne.

Exercice 25 **

Les polynômes $A(X) = X^5 + X^4 + X - 2$ et $B(X) = X^3 - X + 1$ ont-ils une racine commune?

Exercice 26 **

Soit $P(X) = X^2 + aX + b$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2 et unitaire. Si α et β sont les racines de P , montrer que l'on a $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$.

Exercice 27 **

Montrer que les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 28 ***

Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

1. Déterminer le degré de P .
2. Montrer que P possède au moins deux racines réelles entières et en donner leur ordre de multiplicité.
3. Démontrer que P est divisible par $(X - j)^2$ où $j = e^{i2\pi/3}$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

EXTRA

Exercice 29 **

1. Soit $n \geq 3$ un entier, montrer que le polynôme $P(X) = nX^n - (n+1)X^{n-1} - X + 2$ est divisible par $(X - 1)^2$.
2. Soit $n \geq 1$ un entier, montrer que le polynôme $Q(X) = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 1$ est divisible par le polynôme $X^2 - 5X + 6$.

[Indication : on pourra commencer par vérifier que 2 et 3 sont des racines de $Q(X)$.]

Exercice 30 ***

1. Donner la forme polaire des racines complexes du polynôme $A(X) = X^5 - 1$.

2. Justifier l'existence du polynôme B tel que $A(X) = (X-1)B(X)$, puis calculer B par une division euclidienne.

3. Dédire des questions précédentes la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Puis donner la factorisation de B en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les trois questions suivantes, on veut établir d'une autre manière la factorisation de B afin de répondre à la question finale de l'exercice.

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul, on pose

$$E(z) = z^2 \left[\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 \right].$$

Montrer que E est une fonction polynôme que l'on calculera.

5. Factoriser la fonction polynôme $P(x) = x^2 + x - 1$.

6. A l'aide du changement de variable $x = z + \frac{1}{z}$, en déduire une factorisation de $E(z)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

7. En utilisant l'unicité de la factorisation en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 31 **

On considère les fonctions polynômes suivantes :

$$P(X) = X^5 + (1 - 2i)X^4 + (3 - 6i)X^3 + (3 - 6i)X^2 + (2 - 6i)X + 2 - 4i$$

$$Q(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$

1. Factoriser $Q(X)$ en un produit de polynômes de deg. 1.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$.
3. Factoriser $P(X)$ en un produit de polynômes de degré 1.

Exercice 32 ***

On considère les polynômes :

$$A(X) = 2X^4 + 12X^3 + 30X^2 + 36X + 20$$

$$B(X) = X^2 + 3X + (3 - i)$$

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$. On note $C(X)$ le quotient.
2. Résoudre l'équation $B(X) = 0$. On exprimera les solutions sous forme algébrique. En déduire une écriture de $B(X)$ comme produit de polynômes de degré 1.
3. A l'aide d'une propriété de A , montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C} : B(\alpha) = 0 \Rightarrow C(\bar{\alpha}) = 0$. En déduire *sans aucun calcul* les racines du polynôme C , puis la factorisation de $C(X)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
4. Donner la factorisation de $A(X)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 33 **

1. On suppose que b est un paramètre dans \mathbb{C} et on considère le polynôme $S_b(X) = X^3 - b^3$. Effectuer la division euclidienne de $S_b(X)$ par $X - b$.
2. On considère dans la suite le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 9$. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $X - 1$.
3. Dédire de la question précédente que $P(X)$ peut s'écrire comme la différence entre deux cubes.
4. Dédire des questions précédentes une factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré un à coefficients complexes.

Exercice 34 ***

Dans cet exercice θ désigne un nombre réel.

1. Trouver les solutions z complexes de l'équation : $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.
2. Donner les solutions complexes des deux équations suivantes : $z^3 = e^{i\theta}$ et $z^3 = e^{-i\theta}$.
3. Calculer le polynôme $(X - e^{i\frac{\theta}{3}})(X - e^{-i\frac{\theta}{3}})$ et montrer que ses coefficients sont des nombres réels.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que le polynôme $X^6 - 2\cos(\theta)X^3 + 1$ peut s'écrire comme produit de trois polynômes à coefficients réels et chacun de degré 2 que l'on écrira explicitement.