

TD MATRICES ET DÉTERMINANTS

ÉLIMINATION DE GAUSS-JORDAN, RANG D'UNE MATRICE, APPLICATION AUX SYSTÈMES LINÉAIRES

Élimination de Gauss-Jordan

En effectuant des **opérations élémentaires sur les lignes** d'une matrice, à savoir:

- échanger deux lignes,
- multiplier une ligne par un coefficient non nul,
- ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne,

on peut se ramener à une matrice **échelonnée** (ou triangulaire). C'est-à-dire une matrice dont le premier coefficient non nul de chaque ligne est toujours strictement à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente, et les lignes entièrement nulles se trouvent bas de la matrice.

Le premier coefficient non nul de chaque ligne d'une matrice échelonnée s'appelle un **pivot**.

Exercice 1 *

En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, mettre sous forme échelonnée les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *

Mettre sous forme échelonnée les matrices à coefficients complexes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & i \\ 0 & i-1 & -1 \end{pmatrix}$$

Important :

Montrer qu'en effectuant des opérations élémentaires sur une matrice, on peut toujours se ramener à une matrice échelonnée telle que :

- les pivots valent tous 1,
- tous les autres coefficients d'une colonne où se trouve un pivot sont nuls.

On parle alors de **matrice échelonnée réduite**.

Exercice 3 **

Mettre sous forme échelonnée *réduite* les matrices des questions 1 et 2.

Rang d'une matrice

On appelle **rang d'une matrice** A , le nombre de pivots lorsque l'on s'est ramené à une matrice échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes de A . Ce nombre ne dépend que de la matrice A .

Exercice 4 *

Calculer le rang de toutes les matrices des exercices 1 et 2.

Exercice 5 **

Soit A une matrice de taille $n \times m$. Montrer que le rang de A est inférieur ou égal à m et à n .

Application aux systèmes linéaires

Pour résoudre un système linéaire sous forme matricielle $AX = B$, on peut utiliser la méthode d'élimination de Gauss-Jordan. Pour cela, on écrit la matrice augmentée $(A|B)$ que l'on transforme comme précédemment en une matrice de la forme $(A'|B')$ où A' est échelonnée (éventuellement réduite). Les solutions du système initial sont les mêmes que celles de $A'X = B'$, qui est plus simple à résoudre.

Exercice 6 *

Écrire sous forme matricielle le système linéaire suivant (où les inconnues sont x_1, \dots, x_4) et le résoudre à l'aide de Gauss-Jordan :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 7 *

En mettant sous forme matricielle et en utilisant l'élimination de Gauss-Jordan, résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$1. \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x - 4y + 7z = 3 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} x + 2y - z - t = 2 \\ x + 3y + z + t = 4 \\ 2x + 4y - z - t = 5 \end{cases};$$

Exercice 8 *

On considère le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

À quelle condition sur (a, b, c) , le système admet-il une ou des solutions ? Déterminer alors l'ensemble des solutions.

Exercice 9 **

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants. Dans chaque cas, on discutera des solutions suivant la valeur du paramètre m .

$$(\mathcal{T}_m) \begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases},$$

$$(\mathcal{S}_m) \begin{cases} (m+1)x + y + z = 0 \\ x + (m+1)y + z = 0 \\ x + y + (m+1)z = 0 \end{cases}.$$

Exercice 10 *

Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants :

$$1. \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} -2x + y + 3z = 0 \\ x - 4y - 5z = 0 \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ -2y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + 3z + t = 0 \end{cases}.$$

CALCUL MATRICIEL

Exercice 11 *

Lorsqu'ils sont définis, calculer les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } B = (1 \ 1 \ 1)$$

$$3. A = (1 \ 1 \ 1) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+2i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & 3i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 *

Parmi les affirmations suivantes, dire lesquelles sont correctes :

1. L'addition de matrices est commutative, i.e. pour deux matrices A et B de même taille, on a $A + B = B + A$.
2. La multiplication de matrices carrées est commutative, i.e. pour deux matrices carrées A et B de même taille, on a $AB = BA$.
3. L'addition de matrices est associative, i.e. $A + (B + C) = (A + B) + C$ dès que ces sommes sont définies.
4. La multiplication de matrices est associative, i.e. $A(BC) = (AB)C$ dès que ces produits sont définis.
5. La multiplication des matrices est distributive à gauche sur leur addition, i.e. $A(B+C) = AB+AC$ dès que les deux membres de cette égalité sont définis.
6. La multiplication des matrices est distributive à droite sur leur addition, i.e. $(A+B)C = AC+BC$ dès que les deux membres de cette égalité sont définis.
7. Soient A et B deux matrices telles que le produit AB est défini. Si $AB = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 13 *

Soit A une matrice de taille 2×2 et notons C_1 et C_2 ses deux colonnes. Trouver des matrices E_1 et E_2 de taille 2×1 telles que $AE_j = C_j$ pour $j \in \{1, 2\}$. Généraliser en dimension quelconque.

Exercice 14 *

Soient A, X et Y des matrices de taille $n \times n$ telles que $XA = I_n$ et $AY = I_n$ où I_n est la matrice identité $n \times n$. Montrez que $X = Y$.

Exercice 15 *

Soient A et B des matrices $n \times n$ telles que $A + B = I_n$ et $AB = 0_n$. Montrez que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

Exercice 16 **

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

- Soient A et B des matrices de E . Montrez que
 - $A + B$ et AB sont des matrices de E ,
 - $AB = BA$.

- Trouvez une matrice J de E telle que $J^2 = -I_2$, et montrez que toute matrice A de E s'écrit sous la forme $A = a \cdot I_2 + b \cdot J$.
- En déduire que E est en bijection avec un ensemble de nombres bien connu et montrez que les opérations d'addition et de multiplication sont compatibles avec celles de E .
- À quelle opération sur E correspond la conjugaison ?

Exercice 17 **

Pour un entier n , on définit la matrice M_n de taille $n \times n$ dont les coefficients sont $m_{i,j} = 1$ si $i \leq j$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.

- Expliciter M_2 et M_3 .
- Calculer $(M_2)^2$ et $(M_3)^2$.
- Calculer $(M_n)^2$ dans le cas général.

Exercice 18 **

Trouvez des matrices A, B de taille 2×2 telles que $AB = 0_n$ et $BA \neq 0_n$.

MATRICES INVERSIBLES

Exercice 19 *

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$. Démontrer chacune les affirmations suivantes :

- Si A est inversible et $A^{-1} = B$, alors B est inversible et $B^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles et $C = AB$, alors C est inversible et $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est inversible, alors pour tout $n > 0$, A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Exercice 20 *

Soit A une matrice carrée. Montrer que si A est inversible alors tout système linéaire $AX = B$ admet une unique solution et exprimer cette solution en fonction de A^{-1} et B .

Calcul de l'inverse

Si on sait qu'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est inversible, alors on peut calculer son inverse par la méthode de Gauss-Jordan. Pour cela, on forme la matrice augmentée $(A | I_n)$ et on effectue des opérations élémentaires sur les lignes jusqu'à obtenir une matrice de la forme $(I_n | B)$. La matrice B est alors l'inverse de A .

Exercice 21 *

Calculer les inverses des matrices carrées suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$$

Exercice 22 **

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 *

Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et B une matrice quelconque de taille $n \times n$. On définit D la matrice de taille $n \times n$ par $D = A^{-1}BA$. Calculez D^n pour tout $n > 0$ en fonction de A et de B .

Exercice 24 *

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 .
2. Montrer que $A^2 = A + 2I$.
3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 25 **

Soit A une matrice carrée A de taille $n \times n$. Montrer que s'il existe un polynôme $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ de degré ≥ 1 avec $a_0 \neq 0$ et tel que la matrice $P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$ est nulle, alors A est inversible.

DÉTERMINANT

Quelques propriétés du déterminant

Pour A une matrice carrée :

- Si A est triangulaire, son déterminant $\det(A)$ est le produit des termes diagonaux.
- Si A a une ligne (ou une colonne) nulle, alors $\det(A) = 0$.
- Si A' est obtenue à partir de A en échangeant deux lignes (ou deux colonnes) de A alors $\det(A') = -\det(A)$.

- Si A' est obtenue à partir de A en multipliant une colonne (ou une ligne) par un scalaire λ , alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
- Si A' est obtenue en ajoutant à une ligne de A un multiple d'une autre ligne de A (ou en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A), alors $\det(A') = \det(A)$.

3. Donner une formule pour $\det(\lambda M)$.
4. A-t-on $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?
5. Soient A et B deux matrices carrées. Pourquoi a-t-on $\det(AB) = \det(BA)$ même si $AB \neq BA$?

Exercice 28 *

Soit A une matrice inversible. Supposons que $A = A^{-1}$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det(A)$?

Exercice 29 **

Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

Exercice 30 **

Sans calculer le déterminant, montrer que $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ est divisible par 13 sachant que 13 divise 299, 468 et 741.

Exercice 26 *

Déterminer le plus simplement possible les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 27 *

1. Soit A une matrice carrée et A' la matrice obtenue par l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$. A-t-on $\det(A) = \det(A')$?

2. Soit $a \neq 0$. A-t-on : $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$?

Développement selon une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times n$ avec $n > 0$. On note $A_{i,j}$ la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne. Alors on a :

- Développement selon la i -ème ligne : $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$.
- Développement selon la j -ème colonne : $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$.

Exercice 31 *

Soit A une matrice de taille 3×3 . Retrouver la formule de Sarrus pour le déterminant de A en utilisant le développement selon la première ligne.

Exercice 32 *

En développant selon une ligne ou une colonne bien choisie, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 33 *

Calculer (par plusieurs méthodes différentes si possible) le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 34 **

Par deux méthodes différentes, calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$.

Proposition

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$

Exercice 35 *

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 36 *

À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont inversibles :

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 37 *

Soient A, B, C trois matrices carrées de même taille telles que $AB = C$. Montrer que si C est inversible alors A et B sont inversibles.

Exercice 38 **

Soit a, b, c, α des nombres réels. On considère le système linéaire $AX = C$ sur \mathbb{R} , où :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha - 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \alpha - 3 \\ 1 & \alpha - 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de α a-t-on $\det(A) \neq 0$? Combien de solutions le système a-t-il dans ce cas?
2. Résoudre le système dans les cas où $\det(A) = 0$.

POUR ALLER PLUS LOIN

Gauss-Jordan**Exercice 39 *****

Écrire en pseudo-code l'algorithme de la méthode d'élimination de Gauss-Jordan qui permet de mettre une matrice (à coefficients réels) sous forme échelonnée réduite en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

Calcul matriciel**Exercice 40 *****

Trouvez toutes les matrices A réelles de taille 2×2 telles que :

1. $A^2 = 0_2$,
2. $A^2 = I_2$,
3. $A^2 = A$.

Formule du binôme

Soit A et B deux matrices carrées de même taille qui **commutent** (i.e. $AB = BA$). Alors pour tout $n > 0$, on a la formule suivante :

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

Exercice 41 ***

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda + \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{pmatrix}$.

1. Écrire A sous la forme $A = \lambda \cdot I_2 + S$ où S est une matrice 2×2 telle que $S^2 = I_2$.
2. Montrer que $A^n = \frac{(\lambda + 1)^n}{2}(I_2 + S) + \frac{(\lambda - 1)^n}{2}(I_2 - S)$.

Exercice 42 ***

On dit qu'une matrice carrée A est **nilpotente** s'il existe un entier $p > 0$ tel que $A^p = 0$.
Montrer que si A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent, alors $A + B$ est aussi une matrice nilpotente.

Matrice inversible

Exercice 43 ***

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $(M - I_3)(M + 3I_3) = 0_3$.
2. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1} en fonction de M et de I_3 .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (a_n, b_n) tel que $M^n = a_n M + b_n I_3$.

4. Calculer a_{n+1}, b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n .

Déterminant

Exercice 44 ***

Montrer qu'une matrice carrée triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

En déduire que pour une matrice A carrée de taille $n \times n$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- A est inversible,
- le rang de A est n ,
- le système $AX = 0$ n'admet que 0 comme solution.

[Indication : on pourra utiliser la méthode d'Élimination de Gauss-Jordan pour se ramener au cas triangulaire.]

Exercice 45 ***

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 4 & -9 \\ -3 & 3 & -8 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante sur un réel λ pour qu'il existe un vecteur colonne X non nul tel que $AX = \lambda X$ est $\det(A - \lambda I_3) = 0$. [Indication : on pourra utiliser la question 44]
2. En déduire que les seuls valeurs de λ possibles sont $\lambda = 1$ et $\lambda = -2$.
3. Trouver deux solutions *non colinéaires* et non nulles du système $(A - I_2)X = 0$ que l'on notera X_1 et X_2 .
Trouver également une solution non nulle du système $(A + 2I_2)X = 0$ que l'on notera X_3 .
4. Soit P la matrice obtenue en juxtaposant X_1, X_2 et X_3 , i.e. $P = (X_1|X_2|X_3)$. Montrer que P est inversible et que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$