TD SUITES ET SERIES NUMERIQUES

N.B.

La difficulté de chaque exercice est indiquée par le nombre d'astérisques : il va d'un * pour les exercices d'application directe du cours, à quatre **** pour les exercices plus abstraits ou mélangeant différentes notions.

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Question 1 **

Soit a et r deux nombres réels et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme a et de raison r.

a. Donner une formule explicite pour x_n.

b. Calculer la limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ en fonction de a et de r.

Question 2 **

a. Prouver par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{k} n \;=\; 0+1+2+\cdots+k \;=\; \frac{k(k+1)}{2}.$$

b. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme a et de raison r.

Pour k entier, calculer explicitement $\sum\limits_{n=0}^{k} x_n$.

Question 3 **

Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q.

a. Donner une formule explicite pour x_n pour tout n entier.

b. On suppose de plus $q \neq 1$. Prouver par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{k} x_n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}.$$
Que vaut la somme si $q = 1$?

Question 4 **

Calculer les sommes suivantes.

a. $1-2+4-8+16-32+\cdots+4096.$

b. $1+3+9+27+81+\cdots 59049.$

c. $1+3+5+7+9+\cdots+999.$

Question 5 *

Déterminer le nombre a tel que les 3 nombres suivants : 7, a et 8 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique.

SUITES RÉCURRENTES

Question 6 ***

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, définie par $\begin{cases} x_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(x_{n+1}) = 1 + \ln(x_n) \end{cases}$

a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, et préciser la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{k} x_n$ en fonction de k.

d. Exprimer la somme $\sum\limits_{n=0}^{k} \ln(x_n)$ en fonction de k. En déduire le calcul de $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$ en fonction de k.

Question 7 **

On donne la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$x_0 = 7 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = 2x_n - 3.$$
Montrer que $x_n = 2^{n+2} + 3$ pour tout n.

Question 8 **

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs suivante $\begin{cases} x_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \end{cases}$

a. Démontrer que $0 < x_n < 2$ pour tout n.

b. Démontrer que $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout n.

Question 9 **

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} x_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1 \end{cases}$$

a. Conjecturer le sens de variation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Étudier les variations de la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$

c. Démontrer la conjecture.

Question 10 **

Déterminer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n \end{cases}$$

Question 11 **

Déterminer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \end{cases}$$

Reconnaissez-vous cette suite ?

Question 12 **

Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$. On considère la suite de réels strictement positifs définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(u_n + \tfrac{x}{u_n}\right)$$

a. Montrer que $u_n \geq \sqrt{x}$ pour tout $n \geq 1$.

b. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.

Question 13 **

Soient $0 < a < b$. Montrer préliminairement les inégalités suivantes $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$. On considère maintenant les suites de réels strictement positifs définies par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_1 = a \text{ et } y_1 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \text{ et } y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\quad x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$.

Question 14 *

On considère la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n}, \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

a. Calculer x_1, x_2, x_3, x_4 en laissant les résultats sous forme fractionnaire.

b. Conjecturer la forme générale de x_n et prouver ce résultat.

Autre méthode : montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n = 2^n x_n$ est arithmétique.

Question 15 **

Etudier les suites définies de la façon suivante (comportement, convergence, expression éventuelle explicite en fonction de n) :

a. $U_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2U_{n+1} = U_n - 1$
(trouver α tel que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = U_n - \alpha$ soit géométrique)

b. $R_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_{n+1} = \dfrac{1}{3}R_n + n - 1$
(on montrera que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = 4U_n - 6n + 15$ est géométrique)

c. $S_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_{n+1} = 3S_n - 2n + 3$

d. $V_0 = 3 \quad V_1 = -\dfrac{4}{35}$,
et $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+2} = \dfrac{3}{35}V_{n+1} + \dfrac{2}{35}V_n$

Question 16 ***

a. Etudier la suite définie par $U_0 = 1$, $U_1 = k \in \mathbb{R}$
et $\forall n \geq 0$, $\quad U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.

b. Que retrouve t-on lorsqu'on prend $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$?

c. La calculatrice ne peut pas calculer le n-ième terme de la suite en utilisant $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Elle utilise une valeur approchée $k' = k + \varepsilon$. Que vaut l'expression en fonction de n des termes de la suite si on prend $U_1 = k'$?

d. Optionnel : quelles sont les limites de la suite quand $U_1 = k$ et quand $U_1 = k'$? Quel résultat donne la calculatrice ?

DÉFINITION DE LIMITE D'UNE SUITE ET CONVERGENCE

Question 17 *

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{(inégalité de Bernoulli).}$$

b. En déduire que si $q \in \mathbb{N}$ et $q > 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = +\infty$.

c. En déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$ (utiliser des théorèmes d'opération sur les limites).

Question 18 *

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1 \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

a. Justifier que la suite U est croissante.

b. Démontrer la majoration : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

c. En déduire que la suite U est majorée par une suite convergente.

d. Conclure.

Question 19 *

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in N^* \; U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{E(kx)}{n^2}$.

Encadrer la suite U par deux suites convergentes vers $\dfrac{x}{2}$ pour en déduire que la suite U converge vers $\dfrac{x}{2}$.

Question 20 **

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$.

a. On suppose $\ell > 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

b. On suppose $\ell < 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

c. Montrer par des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

SUITES ET MATRICES

Question 21 *

On note u et v les suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 8v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Pour tout entier n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

En déduire pour tout n une expression de X_n en fonction de A et de X_0 .

b. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculer P^{-1} , puis vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on notera D.
- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- Pour tout n, calculer A^n puis X_n . En déduire pour tout n l'expression de u_n et v_n.

Question 22 *

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution du nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2021.

En 2021, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2021, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2021.
On a donc $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.
Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$$

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

a. — Déterminer U_1
 — Écrire la relation matricielle qui permet d'exprimer, pour tout n, U_{n+1} en fonction de U_n.

b. — Calculer $(I_2 - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
 — En déduire que la matrice $I_2 - M$ est inversible et préciser son inverse.
 — Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$.
   - Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.
   - En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

d. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

   - Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

INTRODUCTION AUX SÉRIES NUMÉRIQUES

Question 23 *

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soir $s \in \mathbb{R}$. Donner la définition *précise* de « $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = s$ ».

Question 24 **

Soit $q \in \mathbb{R}$.

a. En utilisant la question 9, montrer que, si $|q| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

b. Que peut-on dire si $q \geq 1$?

c. Que peut-on dire si $q \leq -1$?

Question 25 **

Soit$(x_n)_{n\geq 1}$ la suite donnée par $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

a. Pour tout entier k non nul, on pose $S_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$. Calculer explicitement S_k pour $k = 1, 2, 3, 4$.

b. Vérifier que pour tout $n \geq 1$ $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Question 26 **

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n > 0$ pour tout n. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$.

a. On suppose que $\ell < 1$. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

b. On suppose que $\ell > 1$. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente.

c. Montrer par des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Question 27 **

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n > 0$ pour tout n. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell.$$

a. On suppose que $\ell < 1$. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

b. On suppose que $\ell > 1$. Démontrer que $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente.

c. Montrer par des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.