Partiel

12 mars 2022 - 9h - 11h30

Durée : 2h30. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les notes manuscrites sont interdites.
Cartables en bas de l'amphi.

Exercice 1. (3 points)
Déterminer si l'équation diophantienne $10x+16y=4$ d'inconnues x et y a des solutions. Si oui, les expliciter toutes (un bonus sera donné à ceux qui savent expliquer correctement comment les trouver).

Exercice 2. (6 points)
On rappelle qu'un entier pair (respectivement impair) s'écrit sous la forme $2k$ (respectivement $2k+1$) avec $k \in \mathbb{Z}$.

Questions préliminaires :

1) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier n par 4 ?

2) Justifier que le carré d'un nombre pair est nécessairement divisible par 4.

3) Quel est le reste dans la division euclidienne par 4 du carré d'un nombre entier impair ?

4) En déduire que si $n = x^2$ (avec $x \in \mathbb{Z}$) alors n est congru à 0 ou 1 modulo 4.

Dans la suite de cet exercice on étudie les triplets pythagoriciens, c'est à dire les triplets d'entiers (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

5) Justifier que le triplet $(3, -4, 5)$ est un triplet pythagoricien.

6) En utilisant les questions préliminaires, recopier et compléter la dernière colonne du tableau suivant qui donne les valeurs possibles - entre 0 et 3 - pour $x^2 + y^2$ modulo 4 selon la parité de x et de y.

x	y	$x^2 + y^2$ modulo 4
pair	pair	
impair	pair	
pair	impair	
impair	impair	

7) Déduire du tableau qu'il n'existe pas de triplet pythagoricien (x, y, z) avec x et y impairs.

On dira que trois entiers x, y, z sont premiers entre eux dans leur ensemble lorsqu'il n'y a pas de diviseur commun aux trois nombres x, y, z autre que 1 et -1.

On souhaite montrer que dans un triplet pythagoricien (x, y, z), si x, y, z sont premiers entre eux dans leur ensemble, alors x et y sont de parités différentes et z est impair.

Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien tels que x, y, z sont premiers entre eux dans leur ensemble.

8) Justifier que si p est un nombre PREMIER qui divise x et y alors p divise z.

9) Montrer que si x et y sont pairs, alors cela contredit l'hypothèse x, y, z premiers entre eux dans leur ensemble.

10) Conclure.

Exercice 3. (4 Points)
Soient $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $Z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

1. Placer les points M_1, M_2, M_1' et M_2' d'affixes respectives z_1, z_2, $\overline{z_1}$ et $\overline{z_2}$ dans le plan complexe.
2. Mettre z_1, z_2 sous forme exponentielle ou trigonométrique.
3. Calculer Z sous formes algébrique et exponentielle.
4. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{-11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{-11\pi}{12}\right)$, puis de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. (3 Points)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler les formules d'Euler qui permettent d'exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.
2. En déduire la linéarisation de $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$, c'est-à-dire une expression de $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$ pour divers entiers k.

Exercice 5. (4 Points)
Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à coefficients complexes : $iz^2 + 3iz - 5 - 3i = 0$.
1) Montrer que le discriminant de cette équation est $\Delta = -21 + 20i$.
2) Calculer les racines carrées de Δ. (on donne $(-21)^2 + 20^2 = 29^2$).
3) En déduire les solutions de l'équation, on les donnera sous forme algébrique.

2023

Partiel du MI2 — le samedi 11 mars — 2h30

L'usage des calculatrices, téléphones et de tout document est strictement interdit. Une attention particulière sera apportée à la justification des arguments et à la qualité de la rédaction. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 — a) En utilisant la formule de Moivre, déterminer une formule qui fournit $\cos(4t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait

$$\cos(4t) = P(\cos(t)).$$

c) Vérifier la relation dans le cas particulier où $t = \frac{1}{6}\pi$.

Exercice 2 — Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P(X) = X^3 + (2-i)X^2 + (1+i)X - 4.$$

a) Montrer que 1 est racine de P.

b) Déterminer un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$.

c) Calculer $P(i)$ et $Q(i)$ et vérifier que $P(i) = (i-1)Q(i)$.

d) Déterminer les racines carrées complexes de $-8-6i$. On les exprimera sous forme algébrique.

e) Déterminer les racines de Q.

f) En déduire une factorisation de P en produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 — Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne $30x + 34y = b$ où b est un paramètre $\in \mathbb{Z}$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur b pour que cette équation ait au moins une solution.

b) On prend $b = 2$. Donner une solution particulière de l'équation diophantienne. En déduire l'ensemble des solutions.

Exercice 4 — a) Donner la forme exponentielle du complexe $w = -8i$.

b) Déterminer l'ensemble des solutions z dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = w$. On les donnera sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

c) Indiquer dans le plan complexe les points M_z dont les affixes sont les solutions z de l'équation $z^3 = w$.

Partiel

9 mars 2024 - 9h - 11h30

Durée : 2h30. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les notes manuscrites sont interdites.
Cartables en bas de l'amphi. Téléphones éteints. NOTEZ VOTRE NUMERO DE GROUPE SUR LA COPIE

Exercice 1. (4 points)
On veut calculer le reste de la division euclidienne de 7234^{2024} par 7.
1) Montrez que 7234 est congru à 3 modulo 7.
2) Calculer les puissances successives de 3 modulo 7 pour voir apparaitre un 1.
3) En déduire le reste de la division euclidienne de 7234^{2024} par 7.

Exercice 2. (3 points)
On cherche deux entiers positifs a et b tels que $\mathrm{PGCD}(a,b) = 11$ et $\mathrm{PPCM}(a,b) = 132$.
1) On note $a' = \dfrac{a}{11}$ et $b' = \dfrac{b}{11}$. Que vaut le produit $a'b'$?
2) Déduire les valeurs possibles pour les couples (a', b').
3) Déduire enfin les valeurs possibles pour les couples (a, b) solutions du problème initial.

Exercice 3. (3 points)
Dans cet exercice on veut résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x^2 + y^2 = 31$.
1) Montrer qu'il est impossible que $| y | \geq 6$.
2) Montrer que si x et y sont solutions alors $y^2 \equiv 1 \pmod 3$.
3) En déduire les valeurs possibles de y.
4) En déduire les valeurs possibles de x correspondantes.
5) Conclure.

Exercice 4. (5 Points)
On pose $\omega = \cos(\dfrac{2\pi}{5}) + i\sin(\dfrac{2\pi}{5})$.
1) Placez les points d'affixe $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ dans le plan complexe.
2) Justifier que $\omega^5 = 1$.
3) En déduire la relation $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ (on reconnaitra la somme des 5 premiers termes d'une suite géométrique).
4) Montrez que $\omega + \omega^4 = 2\cos(\dfrac{2\pi}{5})$. Montrez également que $\omega^2 + \omega^3 = 4\cos^2(\dfrac{2\pi}{5}) - 2$.
5) En déduire que $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$ est une solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ puis la valeur de $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$.

Exercice 5. (5 Points)
On considère le polynôme $P(X) = \mathrm{i}X^4 + \mathrm{i}X^3 - (5 + 8\mathrm{i})X^2 + (10 + 9\mathrm{i})X - (5 + 3\mathrm{i})$ de $\mathbb{C}[X]$.
1) Justifier que 1 est racine double de $P(X)$.
2) Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^2 - 2X + 1$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z^2 + 3\mathrm{i}z - 5 - 3\mathrm{i} = 0$ (on sera amené à utiliser $(-21)^2 + 20^2 = 29^2$).
4) En déduire la factorisation de $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Examen

22 mars 2025 - 9h - 11h

Durée : 2h. Le barème est indicatif.
Le poly de cours est autorisé. Les calculatrices et les appareils connectés ne sont pas autorisées. Les notes manuscrites sont interdites. Cartables en bas de l'amphi.

Exercice 1. (questions de cours) (3 points)

1. Ecrire le théorème de division euclidienne pour les polynômes.
2. Démontrer l'unicité du couple (Q, R) vérifiant les conditions de ce théorème.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que si le polynôme $(X - \alpha)$ divise un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ alors α est racine de P.
4. Réciproquement, démontrer que si α est racine de P alors $(X - \alpha)$ divise P.

Exercice 2. (3 points)

1. Montrer que 2^6 est congru à 1 modulo 9.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{123} par 9.

Exercice 3. (4 points)

1. Pour $n = 5, 6, 7$ calculer les couples $(n^2, 2n + 1)$. Prouver à chaque fois que n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux. On souhaite généraliser ce résultat.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $d \in \mathbb{N}$ divise n^2 et $2n + 1$ alors d divise n (on remarquera que $n = n(2n + 1) - 2n^2$).
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 4. (4 points)
Au restaurant, n personnes prennent le menu à 18 euros et m personnes prennent le menu à 21 euros. Au total, la somme demandée par la serveuse est de 435 euros.
Donner toutes les possibilités pour le nombre n de personnes ayant pris le menu à 18 euros et le nombre m de personnes ayant pris le menu à 21 euros (des points seront attribués aux explications du raisonnement données).

Exercice 5. (6 points)

1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $4 + 4i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $4 + 4i\sqrt{3}$.
2. Déterminer tous les nombres complexes z tels que
$$z^3 = 4 + 4i\sqrt{3}.$$
3. Placer ces solutions dans le plan complexe (on attend juste un schéma approximatif).
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1 + i)Z^2 - 3Z + 2 - i = 0$ (on devra surement calculer les racines de $-3 - 4i$).
5. Donner enfin en justifiant votre raisonnement les racines du polynôme de degré 5
$$P(X) = (X^3 - 4 - 4i\sqrt{3})\left((1 + i)X^2 - 3X + 2 - i\right).$$