Canons Rythmiques

Paul LASCABETTES

Encadré par Jean-Yves DUCLOUX

L3 Mathématiques Fondamentales.
Université Paris Diderot.

Semestre 6 - 2017

Table des matières

Chapitre 1

Canons rythmiques et canons de Vuza

1.1 Introduction aux canons rythmiques

Vous connaissez surement déjà la notion de canon musical avec la célèbre chanson *"Frère Jacques"*.
Un musicien commence par jouer le thème, puis les autres musiciens jouent le même thème en décalé. Ainsi, dans notre exemple, le premier chanteur commence le thème : *Frère Jacques, frère Jacques, Dormez-vous ?* puis le second chanteur reprend ce même thème à l'identique une mesure plus tard, le troisième au bout de trois mesures et le quatrième au bout de quatre mesures. Ce qui nous donne :

Frère Jacques, frère Jacques	*Dormez-vous ? Dormez-vous ?*	*Sonnez les matines, sonnez les matines*	*Ding deng dong, ding deng dong*	← 1er musicien
	Frère Jacques, frère Jacques	*Dormez-vous ? Dormez-vous ?*	*Sonnez les matines, sonnez les matines*	← 2e musicien
		Frère Jacques, frère Jacques	*Dormez-vous ? Dormez-vous ?*	← 3e musicien
			Frère Jacques, frère Jacques	← 4e musicien

Nous avons ici l'exemple le plus connu de canon musical. Dans cette étude, nous allons nous intéresser à un cas particulier de canons musicals : ceux des canons rythmiques. C'est à dire, la note jouée par le musicien n'a aucune importance, seul le rythme compte. Pour garder un intérêt musical malgré cette contrainte, nous allons ajouter une condition supplémentaire pour avoir un canon rythmique :

Sur chaque temps, il doit y avoir une seule et unique note.

Définition 1.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$.*
On dit que (A,B) est un ***canon rythmique*** *de période n si :*

l'application $(a,b) \mapsto \overline{a+b}$ de $A \times B$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est bijective

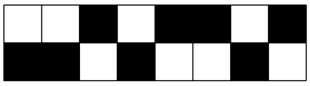
(ce qu'on exprimera sous la forme « $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ »)

Dans ce cas, A est le ***motif du canon*** *et B la* ***séquence des entrées*** *(les temps où chaque instruments commencent à jouer). Ainsi, sur une mesure à n temps, la condition de somme directe implique que pour tous temps, il doit y avoir une seule et unique note. On pourra dire que* ***A pave*** *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$* ***avec B****.*

Exemple. Considérons une mesure à 8 temps et le motif $A = \{0, 1, 3, 6\}$ que nous pouvons représenter ci-dessous, où chaque note du thème est représentée par un carré noir :

Alors le motif A nous donne un canon de période 8 avec $B = \{0, 4\}$. En effet :
$A \oplus B = \{0, 1, 3, 6, 4, 5, 7, 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en travaillant modulo 8 (car $10 \equiv 2 \bmod 8$). Ainsi, A pave $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ avec B.

Nous pouvons en avoir une illustration graphique, chaque ligne représente un musicien et chaque colonne un temps de la mesure :



On remarque bien que sur chaque colonne il y a bien un seul unique carré noir. Nous avons alors fabriqué un canon rythmique !

Remarque. Le nombre de musicien est le cardinal de B. De plus, le cardinal de A est le nombre de notes du thème. Puisque sur chaque temps de la mesure on entend une unique note joué par un seul musicien, on a alors : $\mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) = n$. Cela découle d'ailleurs immédiatement de la définition d'un canon rythmique.

1.2 Opérations sur les Canons Rythmiques

On considérant les canons rythmiques d'un point de vue mathématique nous allons voir les différentes opérations possibles.

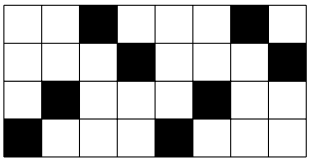
1.2.1 Dualité

Cette opération revient à échanger les rôles de A et B.

Proposition 1.1 *Si A pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec B, alors B pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec A.*

Démonstration. Immédiat.
[Sur chaque temps, le i^{e} musicien joue sa j^{e} note. Inverser A et B revient à ce que le j^{e} musicien joue sa i^{e} note modulo n. Ainsi, on conserve le fait que sur chaque temps, on entende une seule et unique note.]

Exemple. Reprenons l'exemple précédant où $A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$. En appliquant le principe de dualité, (B, A) est un canon rythmique que nous pouvons représenter ainsi :

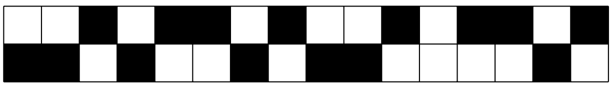


1.2.2 Concaténation

Cette opération consiste à répéter le même motif plusieurs fois. Répéter A k fois revient à changer A en $A \oplus \{0, n, 2n, ..., (k-1)n\}$. Il est clair que cela donne, avec la même séquence B d'entrée un canon rythmique de période nk.

Proposition 1.2 *Si A pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec B, alors $A \oplus \{0, n, 2n, ..., (k-1)n\}$ pave $\mathbb{Z}/nk\mathbb{Z}$ avec B.*

Exemple. Dans notre exemple où $A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$, si on répète 2 fois ce motif on obtiendra alors une mesure à 16 temps où $A = \{0, 1, 3, 6, 8, 9, 11, 14\}$ et $B = \{0, 4\}$.

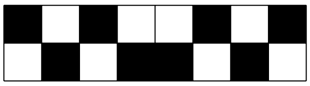


1.2.3 Translation

Soit $k \in \mathbb{N}$. Le motif est translaté, c'est à dire les musiciens commence le motif non pas par la première note mais au temps k, on change A en A + k.

Proposition 1.3 *Si A pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec B, alors $A + \{k\}$ pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec B.*

Exemple. Si l'on translate de 3 temps notre exemple, on obtient $A = \{0+3, 1+3, 3+3, 6+3\} = \{1, 3, 4, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$, c'est à dire :

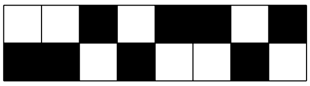


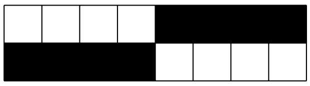
1.2.4 Entrelacement

Si on a k canons rythmiques de période n avec un même B, cela revient à « combiner » ces k canons pour former un canon de période kn.

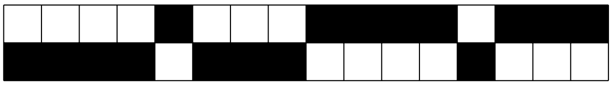
Théorème 1.4 *Si $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec un même B, alors $\bigcup_{i=0}^{k-1} (i+kA_i)$ pave $\mathbb{Z}/kn\mathbb{Z}$ avec kB.*

Exemple. Soit $A_0 = \{0, 1, 3, 6\}$ et $A_1 = \{0, 1, 2, 3\}$ qui pavent $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ avec $B = \{0, 4\}$





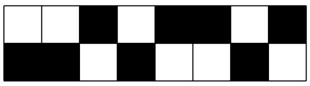
Alors $A = \bigcup_{i=0}^{1} (i + kA_i) = 2A_0 \bigcup (2A_1 + 1) = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 12\}$ pave $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ avec $2B = \{0, 8\}$.



1.2.5 Déconcaténation

De la même manière que l'on concatène des canons rythmiques on peut aussi les **déconcaténer**, ce qui est l'opération inverse de la concaténation. Ainsi, on *découpe* A ou B en k *morceaux* de manière à obtenir des *morceaux symétriques* pour obtenir un canons rythmiques de période n/k.

Exemple. Reprenons l'exemple précédant où $A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$.



On remarque que B peut être découpé en 2, ainsi nous obtenons un canon a une seule voix qui est $A = \{0, 1, 2, 3\}$ car $6 \equiv 2 \bmod 4$ et $B = \{0\}$.

Mais notre nouveau A peut alors être lui aussi découpé en 4 morceaux similaires. On réduit alors notre canon au canon trivial $A = \{0\}$ et $B = \{0\}$.

On remarque alors que ce phénomène se répète sur d'autres canons rythmiques de période identique. Une question naturelle nous vient alors à l'esprit :

Est-ce que l'on peut réduire tout canons rythmiques par déconcaténation au canon trivial ?

Cela revient à dire qu'à partir d'opérations élémentaires telle que la concaténation et la dualité sur le canon trivial, on pourrait obtenir tous les canons rythmiques imaginables.

1.3 Canons de Vuza

Définition 1.2 *Un **canon de Vuza** est un canon (A, B) différent du canon trivial $(\{0\}, \{0\})$ qui ne peut pas être réduit par déconcaténation de A ou de B.*

Théorème 1.5 *Si $n \neq p^\alpha, p^\alpha q, p^2 q^2, pqr, p^2 qr, pqrs$ avec p, q, r, s nombres premiers distincts et $\alpha \in \mathbb{N}$, alors il existe un canon de Vuza qui pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; sinon il n'en existe pas.*

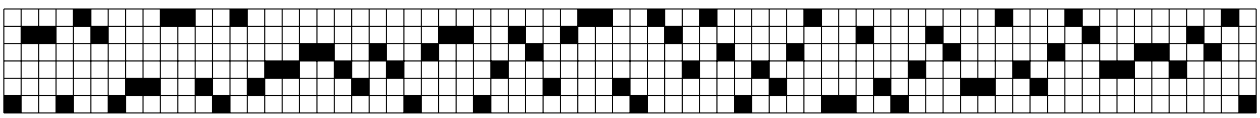
Démonstration. Voir : Dan Tudor Vuza. *Sur le rythme périodique. Revue Roumaine de Linguistique - Cahiers de Linguistique Théorique et Appliquée, 22(1) :173-188, 1985.*

Remarque. Puisque les canons de Vuza sont les canons qui ne se déconcatènent pas, nous pouvons faire l'analogie entre les nombres premiers et les canons de Vuza.

En effet, un nombre premier est un nombre différent de un qui est divisible uniquement par un et par lui-même. Un canon de Vuza est un canon différent du canon trivial qui ne peut pas être réduit par déconcaténation. Ainsi, le canon trivial $A = \{0\}$ et $B = \{0\}$ représente le chiffre 1 et la division serait la déconcaténation !

Exemple. Nous allons donner un exemple de canon de Vuza où $n = 72$.

$$A = \{0, 3, 6, 12, 23, 27, 36, 42, 47, 48, 51, 71\} \quad \text{et} \quad B = \{0, 8, 16, 18, 26, 34\}$$

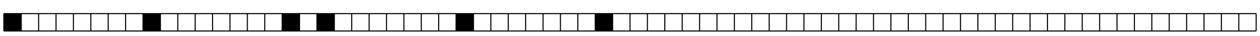


On remarque bien que (A, B) est un canon rythmique. En effet, sur la représentation graphique il y a bien une seule et unique note par temps. Mais est-ce que (A, B) est un canon de Vuza ?

Nous allons voir qu'on ne peut pas déconcaténer A ou B, pour cela représentons-les graphiquement :

Voici le motif A :

Et voici B :



On rappelle que pour pouvoir déconcaténer un motif rythmique de période n, il faut pouvoir le découper en k morceaux symétriques. Donc, on a toujours : k *divise* n.

Ici $n = 72 = 2^3 3^2$, par conséquent il suffit de montrer que A ou B ne peuvent pas être déconcaténer par les diviseurs premier de 72, c'est à dire par 2 ou par 3.

Ainsi, A ou B n'admettent pas d'axe de symétrie donc on ne peut pas déconcaténer A ou B en deux. De plus, on remarque que ni A ni B peut être découpé en trois en gardant 3 morceaux symétriques. En conclusion, A ou B ne peuvent pas être déconcaténer par 2 ou par 3 donc le canon rythmique ne peut pas être réduit par déconcaténation. On en déduit donc que le canon (A, B) est bien un canon de Vuza !

Remarque. D'après le théorème précédent le plus petit canon de Vuza est obtenu pour $n = 2^3 3^2 = 72$

Musicalement, cela est moins intéressant car il nous faut une mesure d'au minimum 72 temps pour avoir un canon de Vuza, alors que nos mesures traditionnelles sont à 4 ou 6 temps. Je suis donc prêt à parier que vous n'avez jamais entendu un canon de Vuza !

Nous pouvons alors déterminer les plus petits n pour lesquels il est possible d'obtenir un canon de Vuza. Ce sont les : $n_1 = 2^3 3^2 = 72 \quad n_2 = 3^3 2^2 = 108 \quad n_3 = 2^3 3^2 5 = 120$

Chapitre 2

Modélisation Polynomiale et Spectrale

2.1 Modélisation Polynomiale

Après avoir introduit la notion de canon rythmique, nous allons maintenant découvrir une nouvelle manière de les percevoir : nous allons identifier le motif rythmique A et la séquence des entrées B par deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$.

2.1.1 Polynôme associé à un canon rythmique

Définition 2.1 *Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$. On pose :*

$$A(X) = \sum_{k \in A} X^k$$

Exemple. Reprenons notre exemple où $A = \{0, 1, 3, 6\}$, dans ce cas : $A(X) = 1 + X + X^3 + X^6$.

Proposition 2.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$.*

*(A, B) est un **canon rythmique** de période n* $\iff$ $A(X) \times B(X) \equiv 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1} \quad mod\ X^n - 1$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$.

On a $A(X) \times B(X) = \sum_{i \in A} X^i \times \sum_{j \in B} X^j = \sum_{i \in A, j \in B} X^{i+j}$. D'où :

(A, B) canon rythmique de période n $\iff$ $A(X) \times B(X) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} X^k \quad mod\ X^n - 1$

Exemple. Reprenons l'exemple où $A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$, alors :

$A(X) \times B(X) = (1 + X + X^3 + X^6) \times (1 + X^4) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 + X^{10} = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 \quad mod\ X^8 - 1$, en effet $X^{10} = X^2 \quad mod\ X^8 - 1$

Remarque. Vous vous demandez sûrement : *Mais pourquoi utiliser une modélisation polynomiale ?*

Parce que nous connaissons très bien $\mathbb{Z}[X]$, en particulier il y a de nombreuses propriétés sur les polynômes qui sont de la forme : $1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$.

En effet, on peut remarquer que : $1 + X + X^2 + ... + X^{n-1} = \frac{X^n - 1}{X - 1}$. Ainsi, les racines du pôlynome $1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$ sont les racines n$^{\text{e}}$ de l'unité autre que 1.

2.1.2 Polynôme cyclotomique

Définition 2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit Φ_n le* ***polynôme cyclotomique*** *comme le polynôme unitaire dont les racines sont les racines de l'unité d'ordre exactement n. Ainsi :*

$$\Phi_n(X) = \prod_{k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Proposition 2.2 *Si Φ_n est un polynôme cyclotomique, on a toujours : Φ_n est un élément de $\mathbb{Z}[X]$, qui est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.*

Théorème 2.3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant Φ_n le n^e polynôme cyclotomique, on a : $\prod_{d|n} \Phi_d = X^n - 1$. Donc :*

$$\prod_{d|n, d \neq 1} \Phi_d = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$$

Par conséquent, lorsque (A, B) est un canon rythmique de période n, en connaissant A nous pouvons grâce aux polynômes cyclotomiques avoir des informations sur B !

Exemple. Donnons une liste de polynômes cyclotomiques :
$\Phi_1 = X - 1$ $\quad \Phi_2 = X + 1$ $\quad \Phi_3 = X^2 + X + 1$ $\quad \Phi_4 = X^2 + 1$
$\Phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ $\quad \Phi_6 = X^2 - X + 1$ $\quad \Phi_8 = X^4 + 1$ $\quad \Phi_{12} = X^4 - X^2 + 1$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et (A, B) un canon rythmique de période n.*

Si $d \in \mathbb{N}^*$ vérifie $d \neq 1$ et $d \mid n$ alors : $\quad \Phi_d \mid A(X)$ ou $\Phi_d \mid B(X)$

Démonstration. Cela provient directement du théorème précédant et du fait que Φ_d est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$. En effet, Φ_d divise $1 + X + X^2 + ... + X^{n-1} = A(X) \times B(X)$ donc Φ_d divise A(X) ou B(X) car c'est un polynôme irréductible.

Exemple. Dans notre exemple où $A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$ nous avons $A(X) = (1 + X + X^3 + X^6)$ et $B(X) = (1 + X^4)$. Essayons de décomposer A(X) et B(X) en produit de polynômes cyclotomiques.

Ici, $n = 8$ donc les entiers qui divisent n sont : 1, 2, 4 et 8. Puisque Φ_1 est exclu il reste : Φ_2, Φ_4 et Φ_8.
On remarque que Φ_8=B(X), on doit donc avoir : $\Phi_2 \mid A(X)$ et $\Phi_4 \mid A(X)$.
En effet, on a : $A(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 - X^2 + X^3) = \Phi_2\Phi_4(1 - X^2 + X^3)$

2.2 Modélisation Spectrale

Dans cette partie nous allons voir, grâce à la transformée de Fourier, une autre approche encore différente des canons rythmiques. Commençons par quelques définitions :

2.2.1 Transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition 2.3 *On pose : $\mathcal{C}(\mathbb{T}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ / f est continue et 1-périodique$\}$*

Définition 2.4 *Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par définition de la* ***transformée de Fourier*** *de f :*

$$\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(t)e^{-2ik\pi t}dt \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}$$

Proposition 2.5 *Si f est $\mathcal{C}^1$ la réciproque est :*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{2ik\pi t} \qquad \text{pour } t \text{ dans } \mathbb{R}$$

Définition 2.5 *Soit f une application de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit la* ***transformée de Fourier sur*** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *de f :*

$$\widehat{f}(k) = \sum_{p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(p) e^{\frac{-2i\pi kp}{n}} \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Proposition 2.6 *Dans ce cas, la réciproque est :*

$$f(p) = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{\frac{2i\pi kp}{n}} \qquad \text{pour } p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une partie finie de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On appèlera la **transformée de Fourier discrète de A** comme la transformée de Fourier discrète de sa fonction caractéristique 1_A :

$$\widehat{1_A}(k) = \sum_{p \in A} e^{\frac{-2i\pi kp}{n}}$$

Définition 2.6 *Soient f et g des applications de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$.*

On définit le ***produit de convolution*** *sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par :*

$$(f * g)(k) = \sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(k-x) g(x)$$

Proposition 2.7 *Soient f et g des applications de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. Alors :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,, \quad \widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k) \times \widehat{g}(k)$$

2.2.2 Propriétés des canons rythmiques

Proposition 2.8 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$.*

$$(A, B) \text{ est un } \textbf{canon rythmique} \text{ de période } n \iff 1_A * 1_B = 1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$$

Démonstration. Cela vient du fait que : $(1_A * 1_B)(k) = \sum_{p+q=k} 1_A(p) 1_B(q) = 1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$

Proposition 2.9 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$.*

$$(A, B) \text{ est un } \textbf{canon rythmique} \text{ de période } n \iff \widehat{1_A} \times \widehat{1_B} = \widehat{1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}}$$

Démonstration. Découle de la propriété précédente en appliquant la transformée de Fourier.

Proposition 2.10 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$.*

On définit $Z(A) = \{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \widehat{1_A}(k) = 0\}$. Alors :

$$(A, B) \text{ est un } \textbf{canon rythmique} \text{ de période } n \iff Z(A) \bigcup Z(B) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \backslash \{0\} \text{ et } \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B) = n$$

Théorème 2.11 $\quad \forall \lambda \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \quad \widehat{f}(k) = 0 \iff \widehat{f}(\lambda k) = 0$

Ainsi, les zéros de Z(A) sont les zéros de l'ensemble Z(λA) pour tout λ inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On pose $F(X) = \sum_{p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(p)X^p$, ainsi $\widehat{f}(k) = F(e^{\frac{-2ik\pi}{n}})$.

Il suffit de montrer la première implication : $\Rightarrow$. Supposons que $\widehat{f}(k) = 0$, donc $F(e^{-2ik\pi/n}) = 0$.

En posant $\xi = e^{\frac{-2ik\pi}{n}}$, ξ est une racine de F, montrons que si λ est inversible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ alors ξ^λ est encore une racine de F. En effet, cela revient à dire que : $\widehat{f}(\lambda k) = F(e^{\frac{-2i\lambda\pi}{n}}) = F(\xi^\lambda) = 0$.
On pose $d = PGCD(k, n)$ et $m = \frac{n}{d}$. Alors, il existe $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que : $d = am + bk$.
Donc : $1 = a\frac{n}{d} + b\frac{k}{d}$, c'est à dire : $1 = am + b\frac{k}{d}$. On déduit que m est premier avec $\frac{k}{d}$.

Ainsi, $\xi = e^{\frac{-2ik\pi}{n}} = e^{\frac{-2i\pi\frac{k}{d}}{m}}$, donc ξ est une racine m^e primitive de 1 car m est premier avec $\frac{k}{d}$.

Or, $\{P \in \mathbb{Q}[X], P(\xi) = 0\} = \Phi_m \times \mathbb{Q}[X]$. Donc il existe $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tel que : $F = \Phi_m \times Q$.

Par conséquent : $F(\xi^\lambda) = \Phi_m(\xi^\lambda) \times Q(\xi^\lambda) = 0 \times Q(\xi^\lambda) = 0$ car ξ^λ reste une racine m^e primitive de 1.

Donc $F(\xi^\lambda) = \widehat{f}(\lambda k) = 0$.

2.3 Théorème Fondamental

Théorème 2.12 *Nous connaissons bien les automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ce sont les $x \longmapsto \lambda x$ où $\lambda \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Ainsi, il est clair que : $A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff \lambda A \oplus \lambda B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Néanmoins, il est beaucoup moins évident que :

$$A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff \forall \lambda \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \quad \lambda A \oplus B = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème de deux façons : la première en utilisant les connaissances d'algèbre et la seconde grâce aux outils d'analyse.

Démonstration avec les polynômes cyclotomiques :

Soit $\lambda \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Changer A en λA revient à changer $A(X)$ en $A(X^\lambda)$. Cette opération est une bijection de l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ considéré modulo $X^n - 1$ dans lui-même.

En effet, montrons que $\varphi : \frac{\mathbb{Z}[X]}{X^n-1} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}[X]}{X^n-1}$ définit par $\varphi(A) = \lambda A$ (ou $\varphi(A(X)) = A(X^\lambda)$) est bijective.

Puisque λ est inversible, on peut très clairement définir φ^{-1} par : $\varphi^{-1}(A) = \lambda^{-1}A$.

Par conséquent : $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = Id$ et φ est bien une bijection.

Par suite, les racines n^e de l'unité qui sont racines de A(X) ne sont pas changées par cette transformation et sont encore racine de $A(X^\lambda)$.

En effet, soit ξ une racine n^e de 1 tel que $A(\xi) = 0$. Alors, montrons que ξ^λ est encore une racine de A soit que : $A(\xi^\lambda) = 0$.

Par le même argument que la démonstration précédente, Φ_n divise A, donc il existe $Q \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $A = \Phi_n \times Q$. Or $\Phi_n(\xi^\lambda) = 0$ donc : $A(\xi^\lambda) = \Phi_n(\xi^\lambda) \times Q(\xi^\lambda) = 0 \times Q(\xi^\lambda) = 0$ donc ξ^λ est racine de A.

Donc, les facteurs cyclotomiques de A(X) ne changent pas et B(X) reste le même.

Or : $A(X) \times B(X) = \frac{X^n-1}{X-1} = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1} = \prod_{d|n, d\neq 1} \Phi_d(X)$

On doit trouver dans le produit $A(X^\lambda) \times B(X)$ tous les facteurs cyclotomiques de $A(X) \times B(X)$ donc $\frac{X^n-1}{X-1}$ divise $A(X^\lambda) \times B(X)$. Pour montrer l'égalité, on connait les $n-1$ racines de $A(X^\lambda) \times B(X)$ *mod* $X^n - 1$ ce qui nous permet de conclure.

Démonstration avec la transformée de Fourier :

Supposons que (A, B) soit un canon rythmique alors : $Z(A) \bigcup Z(B) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\backslash\{0\}$.

Or, d'après le théorème 2.11 les zéros de Z(A) sont les zéros de l'ensemble Z(λA) pour tout λ inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par conséquent, $Z(A) \bigcup Z(B) = Z(\lambda A) \bigcup Z(B)$, et on a toujours : $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\lambda A)$. Donc : $Z(\lambda A) \bigcup Z(B) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\backslash\{0\}$ et $\mathrm{Card}(\lambda A) \times \mathrm{Card}(B) = n$.

Ainsi, $(\lambda A, B)$ est bien un canon rythmique d'après la proposition 2.10 .

Exemple. Retour sur l'exemple $A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$

$3 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ donc $3A = \{0, 3, 9, 18\} = \{0, 1, 2, 3\}$ car $9 = 1$ et $18 = 2$ modulo 8

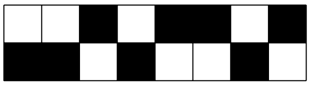
$5 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ donc $5A = \{0, 5, 15, 30\} = \{0, 5, 6, 7\}$ car $15 = 7$ et $30 = 6$ modulo 8

$7 \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ donc $7A = \{0, 7, 21, 42\} = \{0, 2, 5, 7\}$ car $21 = 5$ et $42 = 2$ modulo 8

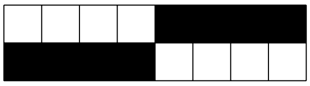
Grâce à ce théorème, on obtient alors de nouveaux motifs 3A, 5A, 7A et donc de nouveaux canons rythmiques qui pavent $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, mais attention on ne les obtient pas tous !

Nous pouvons représenter graphiquement ces transformations :

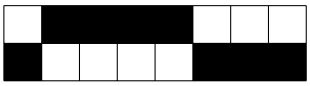
$A = \{0, 1, 3, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$



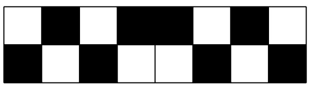
$3A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 4\}$



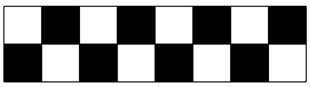
$5A = \{0, 5, 6, 7\}$ et $B = \{0, 4\}$



$7A = \{0, 2, 5, 7\}$ et $B = \{0, 4\}$



On n'obtient pas tous les canons, en effet il manque par exemple le canon rythmique assez simple où $A = \{0, 2, 4, 6\}$ et $B = \{0, 4\}$, qui se représente sous la forme :



De plus, ce dernier canon rythmique est assez particulier car il est invariant par ces transformations. En effet : A = 3A = 5A = 7A .

Chapitre 3

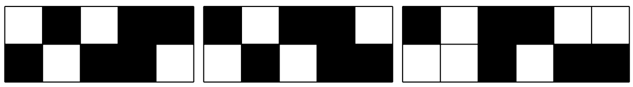
Pavage et Corps Finis

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ que l'on peut considérer comme un motif rythmique. Une question assez naturelle qui nous vient à l'esprit est :

Est-ce que A engendre un canon rythmique ?

Bien sûr, tous les motifs rythmiques n'engendrent pas un canon rythmique par exemple considérons $A = \{0, 2, 3\}$ que l'on peut représenter :

Alors A n'engendre pas un canon rythmique. En effet, une fois que le premier musicien a joué le thème, il a laissé un silence sur le deuxième temps. Ce silence devra être complété par un autre musicien. Mais si un musicien complète ce silence par une note du motif rythmique alors il n'aura pas d'autre solution que de jouer au moins une note en même temps que le premier musicien donc A ne pourra jamais engendrer un canon rythmique.



Ainsi, il faut reformuler correctement notre question :

Quelles sont les conditions sur A pour qu'il engendre un canon rythmique ?

3.1 Théorèmes de Coven-Meyerowitz

On note : $R_A = \{d \in \mathbb{N} \mid \text{d} \mid \text{n } et\ \Phi_d | A(X)\}$ et $S_A = \{p^\alpha \ ;\ p \text{ premier }, \alpha \in \mathbb{N}^*,\ p^\alpha \in R_A\}$.

On définit les conditions C_1 et C_2 par :

1. $C_1 : A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p$
2. C_2 : si $p^\alpha, q^\beta, ... \in S_A$ alors $p^\alpha \times q^\beta \times ... \in R_A$

On peut alors énoncer les théorèmes de Coven-Meyerowitz :

Théorème 3.1 *Si A pave alors C_1 est vérifiée.*

Théorème 3.2 *Si C_1 et C_2 sont vérifiées alors A pave.*

Théorème 3.3 *Si* $\text{Card}(A) = A(1)$ *n'a que deux facteurs premiers et si A pave, alors C_2 est vérifiée.*

Remarque. Ces théorèmes nous aident à déterminer si A engendre un canon rythmique. Mais attention ces théorèmes ne sont que des implications et non des équivalences, nous avons ici seulement des conditions suffisantes OU nécessaires et non des conditions nécessaires ET suffisantes.

Démonstration. Voir : `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869398976281`

3.2 Canons rythmiques modulo p

Nous allons nous intéresser maintenant aux canons rythmiques modulo p dans le but de mieux comprendre les canons rythmiques traditionnels.

Définition 3.1 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier et deux parties finies A et B de $\mathbb{N}$.*

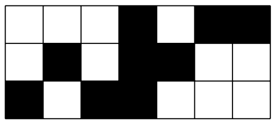
*On dit que (A,B) est un **canon rythmique modulo p** de période n si :*

$$A(X) \times B(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1} \quad (mod\ X^n - 1, p)$$

*Par conséquent, sur une mesure à n temps, il doit y avoir une seule et unique note **modulo p** pour tout temps. On pourra dire que **A pave** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **modulo p avec B**.*

Exemple. Reprenons le dernier exemple où $A = \{0, 2, 3\}$.

Si on se place modulo 2 alors A pave $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ modulo 2 avec $B = \{0, 1, 4\}$.



Remarque. Les canons rythmiques modulo p présentent un grand intérêt musical : on peut travailler avec des mesures plus riches et plus complexes.

Dans le cas des canons rythmiques classiques à n temps on a toujours : $n = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B)$. Mais dans un canon rythmique modulo p nous pouvons maintenant obtenir des mesures à n temps où n est un nombre premier ! Dans l'exemple plus haut $n = 7$, ce qui est beaucoup plus intéressant musicalement qu'une mesure à 4 temps.

Revenons à notre problème initial qui est de déterminer les conditions sur A pour lesquels A engendre un canon rythmique. A notre grande surprise il n'y en a pas, c'est à dire A pavera toujours modulo p.

Théorème 3.4 *Soit A un motif rythmique et p un nombre premier.*

Alors il existera toujours une partie finie B de $\mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : A pave $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ modulo p avec B.

Corollaire 3.5 *Soit p premier et A partie finie de $\mathbb{N}$ contenant 0.*

Alors dans tout $\mathbb{F}_p[X]$, A(X) divise $X^n - 1$ pour n assez grand.

Pour finir, un dernier théorème nous permet de revenir à $\mathbb{Z}[X]$:

Théorème 3.6 *Soit A et B des parties finies de $\mathbb{N}$.*

(A,B) est un canon rythmique $\iff$ $\forall$ p premier, (A,B) est un canon rythmique modulo p

3.3 Conclusion

Nous avons vu ce qu'était un canon rythmique, les différentes opérations mathématiques que l'on pouvait faire avec et surtout les canons de Vuza, c'est à dire les nombres premiers des canons rythmiques.

De plus, nous avons vu les liens importants que l'on pouvait faire avec l'algèbre (polynômes cyclotomiques) et avec l'analyse (transformée de Fourier).

Pour finir, nous avons donné certaines conditions pour que A engendre un canon rythmique et qu'il est possible de généraliser les canons rythmiques en travaillant modulo p.

3.4 Référence

Mon travail s'appuie en grande partie sur le livre *Music Through Fourier Space, Discrete Fourier Transform in Music Theory* d'Emmanuel Amiot
`http://www.springer.com/gp/book/9783319455808`

Je remercie Moreno Andreatta pour m'avoir signalé cette référence.