Université Paris-Diderot — Année 2016-2017

MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Examen partiel du 29/10/2016 (2 heures)

Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Les réponses doivent être justifiées.
Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires. L'exercice 4 est spécifique à chaque filière.

Exercice 1. Soit $w = 4(1 - i\sqrt{3})$.

1. En calculant le module et l'argument de w, mettre w sous forme exponentielle.
2. Déterminer les solutions z à l'équation $z^3 = w$. On exprimera les solutions sous forme exponentielle.
3. Représenter graphiquement les points d'affixe z où les z sont les solutions à l'équation $z^3 = w$. Quelle figure obtient-on ?.

Exercice 2. Le tableau de carrés donné ci-dessous pourra être utile.

n	11	12	13	14
n^2	121	144	169	196

1. (a) Calculer le module du nombre complexe $u = 5 - 12i$ et vérifier que c'est un nombre entier.
   (b) Déterminer une racine carrée du nombre complexe $u = 5 - 12i$.
2. Résoudre l'équation
$$z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0 \ .$$

Exercice 3. On veut étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \ln(1 + e^x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f et étudier le sens de variation.
3. (a) Calculer la limite $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) Calculer la limite $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right)$; déduire $\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + e^x) - x$.
   (c) Calculer la limite $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (1 - x)$.
4. Quelles sont les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$?
5. Présenter les résultats des questions précédentes sous la forme d'un tableau de variations complet.
6. Placer sur un graphique les asymptotes et une esquisse de la courbe, en respectant les résultats obtenus.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Maths et Maths-Infos

1. Définir la fonction Arccos. Après avoir précisé les ensembles de définition, tracer sur le même plan la courbe représentative du cosinus et de l'Arccos.
2. Déterminer les solutions réelles de l'équation
$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
3. En donnant une expression de $\sin(\pi/2-t)$ en fonction de $\cos t$ valable pour tout t, déterminer les solutions réelles de l'équation
$$\cos(3x) = \sin(\pi/2 - 2x).$$

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Info et MIASH
Soit f la fonction définie par $f(x) = -xe^{1-x}$.

1. Calculer la dérivée de f et étudier le sens de variation.
2. Calculer la dérivée seconde de f et étudier la convexité.
3. Préciser les coordonnées du point d'inflexion et déterminer l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Chimie/Step, Physique/CPEI
Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - 1, & \text{pour } x > 1 \\ \sin(x^2 + x - 2), & \text{pour } x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point $x = -2$ et donner une équation de la tangente en ce point.
3. Montrer que la courbe représentative de f admet une tangente au point $x = 2$ et donner une équation de la tangente en ce point.
4. On admettra que l'application $g :]1, +\infty[\to]-1, 0[$ définie par $g(x) = \frac{2}{x^2+1} - 1$ est bijective. Donner une expression de sa bijection réciproque.

Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Informatique et MIASH

Examen du Mercredi 14 décembre 2016

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1.
On définit, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 2, 3);\ v_2 = (2, 1, 4);\ v_3 = (0, 3, 2);\ w_1 = (-1, 0, 2);\ w_2 = (0, -1, 3)$$

ainsi que les sous-espaces vectoriels $E := \text{vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et $F = \text{vect}\{w_1, w_2\}$

1. Montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) est liée.
2. Montrer que la famille de vecteurs (v_1, v_2) est libre.
3. Déterminer la dimension de E et donner une équation cartésienne de E.
4. Montrer que F est un plan de $\mathbb{R}^3$. En donner une équation cartésienne.
5. Déterminer la dimension et une base de $E \cap F$.
6. Extraire un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2\}$ qui forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.
Dans cet exercice z représente un nombre complexe.

1. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $e^{\frac{3i\pi}{4}}$.
2. Exprimer sous forme exponentielle les solutions de l'équation $z^3 - 1 = 0$.
3. En factorisant $z^3 - 1$ en déduire une expression sous forme exponentielle des racines du polynôme $P(z) = z^2 + z + 1$.
4. Exprimer sous forme algébrique les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
5. En remarquant que
$$\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12},$$
exprimer sous forme algébrique $e^{i\frac{\pi}{12}}$. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3.
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x} + x - 1$.

1. Justifier que g est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Donner l'expression de sa dérivée.
3. Que valent $g(0)$ et $g'(0)$?
4. Montrer que g admet une asymptote en $+\infty$ et donner une équation de cette asymptote.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$.

Dans la suite on étudie la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ et $f(0) = 1$.

6. Montrer que f est continue au point $x = 0$.
7. Pour $x \neq 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
8. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
9. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$.
10. Démontrer que le graphe de f admet une tangente au dessus de la valeur $x = 1$ et déterminer l'équation de cette tangente.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Physique et CPEI et DLPC
Soient E et F deux ensembles de réels non vides et majorés.

1. Montrer que E et F admettent chacun une borne supérieure, que l'on notera respectivement $\sup E$ et $\sup F$.
2. Montrer que $E \cup F$ est majoré et admet une borne supérieure $\sup(E \cup F)$.
3. Montrer que $\sup(E \cup F) = \sup(\sup E, \sup F)$.
4. Donner un exemple de deux ensembles E et F comme précédemment tels que $E \cap F$ n'admet pas de borne supérieure.
5. *Question de cours* — Que peut-on dire d'une suite réelle croissante et majorée ? Citer le théorème du cours et le prouver.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Chimie et Step
On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4x+5}{x+2}$. Pour $x_0 \geq 0$ on considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 & = x_0, \\ u_{n+1} & = f(u_n), \ \forall n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
2. On suppose dans cette question que $x_0 = 4$.
   (a) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
   (b) En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer sa limite l.
3. Montrer les assertions suivantes :
   (a) $x_0 = l \Rightarrow$ la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est constante ;
   (b) $x_0 > l \Rightarrow$ la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante ;
   (c) $x_0 < l \Rightarrow$ la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante ;
4. Montrer que pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Maths et Maths-Infos
On se propose d'étudier les deux suites $\{u_n\}_{n \geq 0}$ et $\{v_n\}_{n \geq 0}$ définies par les relations récurrentes suivantes :

$$u_0 = 2, \ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}; \qquad \text{et} \qquad v_0 = 2, \ v_{n+1} = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$$

1. Soit f une fonction continue. Rappeler pourquoi, si elle existe, la limite d'une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $\ell = f(\ell)$.
2. Montrer que, pour tout n, on a $u_n \geq 1$.
3. Montrer que la suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ est décroissante.
4. Montrer que la suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. La suite $\{v_n\}_{n \geq 0}$ est-elle convergente ?
6. Montrer que la suite $\{v_{4n}\}_{n \geq 0}$ est convergente [Indication : on pourra commencer par calculer v_4.]

Exercice 4. Partie différenciée réservée aux filières Info et MIASH

1. Donner la définition d'une suite bornée puis en donner un exemple.
2. Donner la définition puis donner un exemple d'une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$.
3. Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Examen deuxième session

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Exercice 1. Considérons la fonction réelle f définie par $f(x) = \sqrt{3+x^2} - 1$.

1. Donner l'ensemble de définition de f. Est-elle continue ? Dérivable ?
2. Montrer que f est une fonction paire.
3. Calculer la dérivée f' de f.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
5. Montrer que f est une fonction à valeurs positives.
6. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$.
7. Calculer $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ et donner l'équation de l'asymptote de f en $+\infty$.
8. Vu que f est une fonction paire, donner directement (sans justification) l'asymptote de f en $-\infty$.
9. Tracer le graphe de f selon les questions 2, 4, 5, 7, et 8.

Exercice 2. On considère l'équation $(\star)$ $\quad z^3 + 4\bar{z} = 0$.

1. Soit $w \in \mathbb{C}$ une solution *non nulle* de $(\star)$, calculer le module $|w|$.
2. En remplacant z par $2e^{i\theta}$ dans $(\star)$, trouver les 4 solutions non nulles de $(\star)$.
3. Écrire ces solutions en forme cartésienne (forme algébrique).
4. Montrer que l'équation $(\star)$ est équivalente à l'équation $z^5 + 16z = 0$.

Exercice 3. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ensemble des vecteurs (x, y, z) déterminé par l'équation paramétrique suivante

$$(a)\ \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = -\lambda + 2\mu \\ z = 2\lambda - \mu \end{cases}$$

où λ et μ décrivent $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille de vecteurs $B = \big((1,-1,2),(1,2,-1)\big)$ forme une base de V.
3. Donner la dimension de V.
4. Donner une autre base B' de V.
5. Déterminer une équation cartésienne de V.
6. Est-ce que le vecteur $u = (2,1,2)$ appartient à V ? Justifier.
7. La famille formée de u et des vecteurs de B est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. 25% Partie différenciée réservée aux filières Maths et Maths-Info
On définit la suite récurrente suivante : $u_0 \geq 0$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. Montrer que, si $u_0 = 3$, alors la suite u_n est constante.
2. On suppose que $u_n \in [0, 3]$, montrer que u_n est une suite croissante et que pour tout n on a $u_n \in [0, 3]$.
3. Déduire de la question précédente que la suite u_n est convergente et déterminer sa limite.
4. On suppose maintenant que $u_0 > 3$. Quel est le comportement de la suite u_n ?

Exercice 4. 25% Partie différenciée réservée aux filières Info et MIASH
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique réelle.

1. Donner la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.
2. Donner une suite explicite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ mais $a_n \neq 1$ pour tout $n \geq 0$.
3. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n > 0$ pour tout $n \geq N$.

Exercice 4. (**25% Partie différentiée réservée aux filières CHIMIE et STEP**)
Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera chaque réponse.
Soit f la fonction définie sur $I = [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par :

$$f(x) = (\sin x)^2 \cos(2x)$$

Proposition 1 : $\forall x \in I, f(x) \geq 0$.
Proposition 2 : $f'(x) = \sin(2x)(1 - 4(\sin x)^2)$.
Proposition 3 : La fonction f est décroissante sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.
Proposition 4 : $\forall x \in I, f(x) \leq \frac{1}{8}$.

Partiel, 28 octobre 2017

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les cinq exercices proposés sont indépendants. La qualité de la rédaction et la précision des arguments justifiant les réponses sont un élément important dans l'évaluation.

Exercice 1. (fonctions usuelles, limites et asymptotes)

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ telle que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{3-x}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ en 3^+ et en 3^-.
2. Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les asymptotes verticales et obliques de f.
4. La fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \sin(x-3)f(x)$ admet-elle une limite en 3 ? Si oui, déterminer cette limite.

Exercice 2. (Nombres complexes et trigonométrie)

1. Donner une formule permettant de calculer $\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer les identités :

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) .$$

Exercice 3. (Nombres complexes)

1. Écrire le nombre complexe $16\sqrt{3} - 16\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 - 16\sqrt{3} + 16\mathrm{i} = 0$.
3. Représenter dans le plan complexe les solutions de l'équation précédente.

Exercice 4. (Polynômes complexes du second degré)

On définit pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \mathrm{i}z^2 - \sqrt{3}z + 1$.

1. Déterminer les racines de P.
2. Déterminer $a, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z-\mu)(z-\nu)$.

Exercice 5. (Fonctions, bijections)

1. Donner la définition de l'injectivité d'une fonction f.
2. On pose $g(x) = \arctan(\ln x)$. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ et montrer que g est injective.
3. Déterminer un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que l'application $g : \mathcal{D}_g \to I$ soit bijective.

Examen final 1$^{\text{ère}}$ Session

Durée : 3h.

Les documents et la calculatrice sont interdits

Exercice 1. [6 points]

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $P(z) = z^4 - 2\sin(\theta)z^2 + 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre l'équation $(\star)$ $\quad Z^2 - 2\sin(\theta)Z + 1 = 0$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $(\star\star)$ $\quad P(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   On notera z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de $(\star\star)$.
3. Factoriser P en produit de « facteurs linéaires » (autrement dit écrire $P(z)$ comme produit de nombres complexes de la forme $az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ indépendants de z).
4. **Dans la suite on suppose que $\boldsymbol{\theta = 0}$.** Ainsi $(\star\star)$ s'écrit : $z^4 + 1 = 0$.
   Exprimer z_1, z_2, z_3 et z_4 sous la forme exponentielle et sous la forme algébrique (cas $\theta = 0$).
   Représenter géométriquement les points obtenus.
5. Calculer sous la forme exponentielle les racines 4$^{\text{e}}$ de l'unité.
   Représenter géométriquement les points obtenus.
6. Quelle transformation du plan permet de passer des images des racines 4$^{\text{e}}$ de l'unité dans le plan aux images de z_1, z_2, z_3 et z_4 dans le plan ?

Exercice 2. [6 points]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (3, -1, 1),\ v_3 = (3, 2, \alpha)$$

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^3$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3, c'est-à-dire : $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

1. Pour quelles valeurs de α la famille des vecteurs v_1, v_2 et v_3 est-elle libre ?
2. Donner une base de E et la dimension de E selon la valeur de α.
   Pour quelles valeurs de α a-t-on $E = \mathbb{R}^3$?
3. Dans le cas où E est différent de $\mathbb{R}^3$, donner une équation cartésienne de E.
4. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.
   Quelle est la dimension de F ? Justifier la réponse.
   Existe-t-il une valeur de α pour laquelle $E \subseteq F$?

Voir la continuation au verso

Exercice 3. [4 points]

Soit (S) le système d'équations linéaires d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

1. Expliquer en une phrase pourquoi l'ensemble G des solution de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une représentation paramétrique de G.
3. Donner une base de G.
   Quelle est la dimension de G ?

Exercice 4. [4 points]
Partie differenciée réservée aux filières CPEI, STEP, DLPC, Physique et MIASHS

Pour chacune des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ suivantes, déterminer si elle converge ou non, et, si oui, en calculer la limite.

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2 - n}}{2n + \ln n} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

$$v_n = \frac{\sin^n(n)}{\sqrt{n}} \qquad \text{pour } n \geq 1$$

Exercice 4. [4 points]
Partie differenciée réservée aux filières Math et Math-Info

Soit $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$. On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pourquoi peut-on définir une telle suite $(u_n)_{n\geq 0}$?
   Montrer également que cette suite vérifie : $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
3. Conclure que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Université Paris Diderot | 2017 - 2018
L1 | Algèbre & Analyse fondamentales I
18/06/2018 | 51AE01MT

Examen, seconde session

Documents, calculettes, téléphones mobiles et ordinateurs portables sont strictement prohibés.
Une attention particulière sera portée à la justification des arguments utilisés et à la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (EQUATION ALGÉBRIQUE À UNE VARIABLE COMPLEXE).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose : $P(z) = z^6 - 2(\cos\theta)z^3 + 1$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre l'équation $(\star)$ $Z^2 - 2(\cos\theta)Z + 1 = 0$, d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre l'équation $(\star\star)$ $P(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   On notera z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 les solutions de $(\star\star)$.
3. Factoriser P en produit de « facteurs linéaires » (autrement dit écrire $P(z)$ comme produit de nombres complexes de la forme $az + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ indépendants de z).
4. **Dans la suite on suppose que** $\theta = \pi/2$**.** Ainsi $(\star\star)$ s'écrit $z^6 + 1 = 0$.
   Exprimer z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 sous la forme exponentielle et sous la forme algébrique (cas $\theta = \pi/2$).
   Représenter géométriquement les points obtenus.
5. Calculer sous la forme exponentielle les racines 6ème de l'unité.
   Représenter géométriquement les points obtenus.
6. Quelle transformation du plan permet de passer des images des racines 6ème de d'unité dans le plan aux images de z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 dans le plan ?

Exercice 2 (RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES).

Résoudre le système d'équations linéaires d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ suivant :

$$\begin{cases} x + y + t = 1 \\ -y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2t = 1 \\ y + z - t = 3 \end{cases}.$$

Exercice 3 (SYSTÈMES DE VECTEURS).

Soit $m \in \mathbb{R}$. On note u, v et w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$u = (2,1,3), \quad v = (1,2m,m) \quad \text{et } w = (2,m+1,2)$$

et F le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces trois vecteurs, i.e. $F = \mathrm{Vect}(\{u,v,w\})$.

1. Pour quelles valeurs de m la partie $\{u,v,w\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?
2. On suppose la partie $\{u,v,w\}$ de $\mathbb{R}^3$ liée. Déterminer une base de F, sa dimension et une équation cartésienne.
3. On suppose la partie $\{u,v,w\}$ de $\mathbb{R}^3$ libre. Prouver que $F = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (SUR QUELQUES SUITES RÉELLES)**.**

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne converge pas.
2. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge. Quelle est sa limite ?
3. Déterminer si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $w_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge.
4. Déterminer si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $p_n = u_n \cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge.
5. Déterminer si la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $q_n = u_n \cdot w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge.