I. Étude de fonctions. TD 1 - Fonctions usuelles

Fonctions exponentielles, logarithmiques, et puissances.

Exercice 1. Vrai ou faux ?

1. $\ln(72) = 2\ln(3) - 3\ln(2)$.
2. $\ln(0{,}08) = 3\ln(2) - 2\ln(5)$.
3. $\ln(0{,}04) = 2\ln(2) - 2\ln(5) - \ln(4)$.

Exercice 2. Calculer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes.

$\ln(1,5)$, $\ln(16)$, $\ln(^3\sqrt{9})$, $\ln(2\sqrt{2})$, $\ln(0,25\times e)$, $\ln\left(\frac{9}{8}\right)$, $\ln(36e^2)$, $\ln\left(\frac{12}{e^{\frac{4}{5}}}\right)$.

Exercice 3. : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(1-2x) = \ln(x+2) + \ln(3)$.
2. $\ln(1-x^2) = \ln(2x-1)$.
3. $\ln(\sqrt{2x-2}) = \ln(4-x) - \frac{1}{2}\ln x$.
4. $2e^{2x} - 5e^x = -2$.
5. $e^x - 2e^{-x} - 1 = 0$.
6. $\ln(2-x) \leq \ln(2x+1) - \ln(3)$.
7. $\ln(3x+2) \geq \ln\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$.

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition des expressions suivantes avant et après simplification.

1. $e^{4\ln(x) - \ln x}$.
2. $e^{\ln(x^2+1) - \ln(x-1) - \ln(x+1)}$.
3. $e^{\frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \ln(x) - \ln(x^2+1)}$.

Exercice 5. Pour $a > 0$ on définit $a^x = e^{x\ln(a)}$ pour tout réel x.

1. A l'aide des variations connues des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$, étudier les variations de la fonction $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ en fonction des valeurs de a.
   La fonction $\exp_a$ *s'appelle la fonction exponentielle en base* a.
2. Supposons $a \neq 1$. Montrer que la fonction $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ vérifie
   $$\log_a(\exp_a(x)) = x, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
   et
   $$\exp_a(\log_a(x)) = x, \qquad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[.$$
   En déduire les variations de la fonction $\log_a$ en fonction des valeurs de a.
   La fonction $\log_a$ *s'appelle la fonction logarithmique en base* a.
3. Sur un même graphe, tracer approximativement en fonction des valeurs de a les courbes représentatives des fonctions $\exp_a$ et $\log_a$.

Exercice 6. Soient a et b des réels strictement positifs. Montrer que
$$a^x b^x = (ab)^x,$$
pour tout réel x.

Exercice 7. Soit α un réel. On définit $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$ pour tout réel x strictement positif. Étudier les variations de la fonction $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ en fonction des valeurs de α. On tracera les courbes représentatives sur un même graphe dans les différents cas.

Exercice 8. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
$$\sqrt{x^2-3x+2}, \quad \left(\frac{x^2-1}{x^2-x-2}\right)^{3/2}, \quad (x^3-x^2+3x-3)^{-\pi}, \quad (x^2+x+1)^{-1/2}.$$

Rappels de trigonométrie.

Exercice 9. : à partir du cercle trigonométrique, retrouver les relations entre :

1. $\cos(\pi/2-\theta)$ et $\sin(\theta)$,
2. $\sin(\pi/2-\theta)$ et $\cos(\theta)$,
3. $\cos(\pi/2+\theta)$ et $\sin(\theta)$,
4. $\sin(\pi/2+\theta)$ et $\cos(\theta)$,
5. $\cos^2(x)$ et $\sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. : En utilisant la géométrie du triangle, compléter le tableau suivant, les angles étant mis entre 0 et π, dans l'ordre croissant (on précisera si un nombre n'est pas défini) :

θ (radians)		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$				π
θ (degrés)	$0°$			$60°$		$120°$	
$\cos(\theta)$					0		
$\sin(\theta)$							
$\tan(\theta)$							

Exercice 11. : Pour quels $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a-t-on $\cos(x)=\cos(y)$? $\sin(x)=\sin(y)$? $\tan(x)=\tan(y)$?

Exercice 12. : Résoudre les équations suivantes :

(i) $x+2\pi \equiv 2x-\frac{\pi}{3}$ (mod. 2π), (ii) $5x \equiv \frac{\pi}{2}$ (mod. 2π), (iii) $x \equiv \frac{\pi}{3}-3x$ (mod. π)

(iv) $3x-\pi \equiv 2x-\frac{\pi}{2}$ (mod. $\pi/2$), (v) $5x-1 \equiv \frac{\pi}{2}$ (mod. $\pi/3$), (vi) $x \equiv \frac{\pi}{3}-3x$ (mod. $\pi/4$)

Exercice 13. : Résoudre les équations suivantes :

(i) $\cos(2x)=\cos(3x)$, (ii) $\sin(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$, (iii) $\cos(x)=\sin(x)$, (iiv) $\tan(x)=\tan(3x)$

Exercice 14. : Résoudre les équations suivantes :

(i) $4\cos(x)+1=3$, (ii) $4\cos^2(2x)-1=1$, (iii) $(\tan(x)+1)^2-2\tan(x)=4$, (iv) $\sin\left(\frac{\pi}{5}-x\right)=\frac{1}{2}$.

Fonctions périodiques.

On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ d'ensemble de définition $\mathcal{D}$, est périodique de période $T\in\mathbb{R}$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(1) pour tout élément $x\in\mathbb{R}$, on a $x\in\mathcal{D}$ si et seulement si $x+T\in\mathcal{D}$.
(2) pour tout $x\in\mathcal{D}$, on a $f(x+T)=f(x)$.

Exercice 15. Soit $f:[0,1[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ et $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le prolongement de f en une fonction périodique de période 1. Tracer le graphe de $\tilde{f}$.

Exercice 16.
1. Donner un exemple d'une fonction paire et périodique de période 1.
2. Donner un exemple d'une fonction impaire et périodique de période $-0,5$.

Exercice 17. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et à la fois périodique de périodes a et b alors f est périodique de période $a-b$.

Exercice 18. Soit $k\in\mathbb{R}$. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T, que peut-on dire de la fonction $x\mapsto f(kx)$?

Fonctions trigonométriques.

Exercice 19. : Donner l'ensemble de définition des fonctions $x\mapsto\cos(x)$, $x\mapsto\sin(x)$, et $x\mapsto\tan(x)$ puis donner l'allure de leur courbe représentative à partir des définitions. Quelle opération géométrique permet de passer de la courbe de sin à celle de cos ?

Exercice 20. Donner l'ensemble de définition des expressions suivantes :

$$\sqrt{\ln(\cos(x))},\quad \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}},\quad e^{\ln(\tan(x))},\quad \ln(|\cos(x)|),\quad \frac{1}{1-\cos(x)},\quad \frac{1}{\cos(x)+\sin(x)}$$

I. Étude de fonctions. TD 2 - Images, antécédents, bijections

Exercice 1. Déterminer, s'ils existent, les antécédents de 1 par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
2. $f(x) = e^x - e^{-x} + 4$.
3. $f(x) = \log_{10}(x^2 + 1)$.
4. $f(x) = \tan^2(x)$.
5. $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{|x^2-1|}}$.

Exercice 2. Déterminer l'image de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \cos(x)$.
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
3. $f(x) = 4x^2 + 3x + 2$ (on pourra mettre l'expression sous sa forme canonique).
4. $f(x) = -5x^2 - 5x$.
5. $f(x) = x(x^2 + 1)$ (réfléchir plus généralement sur le cas des polynômes de degré 3).
6. $f(x) = e^{(x^2-1)}$.

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \to B$ définie partout sur A est dite **bijective** *si tout élément de B a un seul antécédent par f.*

Exercice 3. Dire parmi les fonctions suivantes celles qui sont bijectives.

1. $[-1, 1] \to [-1, 0]$, $x \mapsto x^2 - 1$.
2. $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$.
3. $]0, 1] \to]0, +\infty[$, $x \mapsto |\ln(x)|$.
4. $]0, 2[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{\ln(2-x)} & \text{si } x \in [1, 2[. \end{cases}$

Exercice 4. Donner un intervalle A de $\mathbb{R}$ pour que les fonctions suivantes soient bijectives puis tracer leur courbe représentative.

1. $A \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$.
2. $A \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$.
3. $A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$.
4. $A \to [0, 2]$, $x \mapsto x^2$.
5. $A \to]0, +\infty[$, $x \mapsto 1/x$.
6. $A \to]0, 1[$, $x \mapsto 2\ln(x)$.
7. $A \to]0, 2[$, $x \mapsto e^{4x}$.
8. $A \to [0, 1]$, $x \mapsto |x^2 - 1|$.

Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une fonction définie partout sur A. f est dite **injective** *si tout élément de B a* **au plus** *un antécédent par f, elle est dite* **surjective** *si tout élément de B a* **au moins** *un antécédent par f.*

Exercice 5. Vérifier qu'une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercice 6. Donner un exemple pour illustrer les cas suivants.

1. f est une fonction surjective mais pas bijective.
2. f est une fonction injective mais pas surjective.

Exercice 7. Donner un intervalle A de $\mathbb{R}$ pour que les fonctions suivantes soient injectives.

1. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(2x)$.
2. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + x + 1$.
3. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x^2 + x + 1$.
4. $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$.

Exercice 8. Donner un intervalle B de $\mathbb{R}$ pour que les fonctions suivantes soient surjectives.

1. $f : \mathbb{R} \to B$, $x \mapsto \cos(2x)$.
2. $f : \mathbb{R} \to B$, $x \mapsto x^2 + x + 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to B$, $x \mapsto x^3 - 3x^2 + x + 1$.
4. $f :]-\pi/2, \pi/2[\to B$, $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$.

Exercice 9. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants et vérifier que $f \circ g \neq g \circ f$.

1. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
2. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 - 3x + 4$.
3. $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = e^x$.
4. $f(x) = |x|$, $g(x) = x + 1$.

Exercice 10. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner l'ensemble de définition de $g \circ f$ dans les cas suivants.

1. $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$.
2. $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \ln(x)$.
3. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$.

Exercice 11. Soient A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une fonction $f : A \to B$ est bijective si et seulement si il existe une fonction $g : B \to A$ telle que
$$g \circ f = \mathrm{Id}_A, \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_B, \tag{1}$$
avec $\mathrm{Id}_A : A \to A$, $x \mapsto x$.
2. Si elle existe, la fonction g ci-dessus est-elle aussi bijective ?

Deux fonctions f et g qui vérifient (1) sont dites *réciproques*, g s'appelle l'inverse de f et est notée f^{-1} (de même f est l'inverse de g et est notée g^{-1}).

Exercice 12.
1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f doit être injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g doit être aussi surjective.
3. Montrer que la récriproque des deux assertions ci-dessus est fausse.

Exercice 13. Donner deux intervalles A et B et deux fonctions $f : A \to B$ et $g : B \to A$ réciproques (l'une de l'autre) dans les cas suivants.

1. une des fonctions est donnée par $x \mapsto x^2$.
2. une des fonctions est donnée par $x \mapsto x^3 + 1$.
3. une des fonctions est donnée par $x \mapsto \ln(x)$.
4. une des fonctions est donnée par $x \mapsto e^{2x}$.
5. une des fonctions est donnée par $x \mapsto x^2 + 3x - 4$.
6. une des fonctions est donnée par $x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.

Exercice 14.
1. Montrer que si f et g sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre alors le graphe de f est le symétrique du graphe de g par la droite $y = x$.
2. Donner des exemples de fonctions $f : A \to A$ telles que $f^{-1} = f$.

Exercice 15. On note $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ la fonction inverse de $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction arcsin.

Exercice 16. On note $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ la fonction inverse de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction arccos.

Exercice 17. Montrer les relations suivantes pour $x \in [-1, 1]$.

1. $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} = \cos(\arcsin(x))$.
2. $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 18. Résoudre l'équation suivante
$$\arccos(x) + \arcsin(x^2 - x + 1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 19. On note $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ la fonction inverse de $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction arctan est impaire puis donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 20. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a
$$\arctan(1/x) + \arctan(x) = \pi/2.$$
En déduire que si $x \in]-\infty, 0[$, alors
$$\arctan(1/x) + \arctan(x) = -\pi/2.$$

Exercice 21. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a
$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \arcsin(x).$$

Exercice 22. A partir des formules connues pour $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ montrer la formule suivante
$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$
En utilisant cette formule montrer les identités suivantes :

1. $2\arctan(1/2) = \arctan(4/3)$.
2. $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$.

I. Étude de fonctions. TD 3 - Limites, asymptotes

Exercice 1. Représentez graphiquement, dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

(a) $\lim\limits_{0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.

(b) $\lim\limits_{0^-} f(x) = 2^+$, $\lim\limits_{0^+} f(x) = 0^-$, $\lim\limits_{4^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{4^+} f(x) = +\infty$, $f(5) = 1$, $f(0) = 2$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2x$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 4x + 3$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 2x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2} - 3}{x-3}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 - 1}$,

(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - 3}$,

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 + x + \ln x$,

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 e^x \ln^2 x$,

(i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^4 - 1}$,

(k) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

(l) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$,

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \cos\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$,

(n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 + \tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)}$,

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$,

(p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} + x}{\sin x}$,

(q) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\dfrac{1}{x}$,

(r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$,

(s) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$,

(t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 2}$,

(u) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1}$,

(v) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$,

Exercice 3. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 \sin x}{x^2 + 1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{3x - 2}{\sqrt[3]{x}}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x^2 - x}{x+2}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 + \ln x}{\ln x - 1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(xe^x)}{x}$,

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x - 2\ln x}{x + \ln x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1 + e^x)}{x}$,

(h) $\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$,

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(x^2e^x\right)$,

(k) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim\limits_{x\to1^+} (x-1)^{x-1}$,

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$,

(n) $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln x)e^{-\frac{1}{x}}$,

(o) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$,

(p) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$,

(q) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln^2 x$,

(r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{5x-1}\frac{2x^2+1}{x^2+2x-1}$,

(s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3}}$,

(t) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2}$,

Exercice 4. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et dire si elles admettent des asymptotes verticales.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$,

(b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$,

(c) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,

(d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$,

(e) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,

(f) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$,

(g) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 5. Dire si les fonctions suivantes admettent des asymptotes obliques/horizontales et les déterminer.

(a) $f(x) = x^2 - 2x$,

(b) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$,

(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$,

(d) $f(x) = 1 + x + \ln x$,

(e) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$,

(f) $f(x) = \frac{\cos(e^x)}{x^4-1}$,

(g) $f(x) = \frac{\ln(|x|)}{\sqrt{x^2-1}}$,

(h) $f(x) = \frac{\pi^x}{x^2}$,

(i) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$,

(j) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(k) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+2}$,

(l) $f(x) = \frac{4x^5-4x^3+3}{x^4+3x^2-x+1}$,

(m) $f(x) = \frac{x^4+x}{x^3-1}$,

I. Étude de fonctions. TD 4 - Continuité, dérivabilité, courbe

Exercice 1. 1. Montrer que la fonction suivante est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = -2x+1$ si $x<0$, $f(x) = e^x$ si $0 \leq x < 1$, $f(x) = ex^2$ si $1 \leq x$.

2. Montrer que la fonction suivante est continue sur $[0,1]$.

$f(x) = 0$ si $x=0$, $f(x) = x + \frac{x\ \ln(x)}{1-x}$ si $0<x<1$, $f(x) = 0$ si $x=1$.

3. étudier la continuité de la fonction suivante.

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ si $x<0$, $f(x) = 0$ si $x=0$, $f(x) = x\ \ln(x) - x$ si $x>0$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$f(x) = x$ si $x<1$, $f(x) = x^2$ si $1 \leq x \leq 4$, $f(x) = 8\sqrt{x}$ si $x>4$.

(a) Montrer que f est strictement croissante.

(b) Tracer le graphe de la fonction f.

(c) f est-elle continue ?

(d) Montrer que f est bijective.

(e) Caractériser la bijection réciproque f^{-1} de f via une formule.

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des points pour lesquels la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

(a) $3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$, (b) $\frac{e^x}{1+x}$, (c) $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$,

(d) $\frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$, (e) $\frac{(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3}$, (f) x^x,

(g) $e^{\alpha\tan(x)}$, (h) $\sin(\sin(\sin x))$, (i) $\cos(\sin(\tan(\pi x)))$,

(j) $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$, (k) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, (l) x^{x^x}.

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en précisant sur quel domaine ce calcul est valable), donner une équation de la tangente en x_o, puis lorsque c'est possible déterminer la position de la tangente par rapport à la courbe à l'aide de la dérivée seconde.

(a) $x \mapsto x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 1$, $x_o = 0$. (b) $x \mapsto (x-3)^{10}$, $x_o = 1$.

(c) $x \mapsto \cos(x) - \sin(x^2)$, $x_o = 0$. (d) $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x_o = 1$.

(e) $x \mapsto \frac{1}{3x-5}$, $x_o = -1$. (f) $x \mapsto x^3\frac{1}{x^5}$, $x_o = 1$.

(g) $x \mapsto \sqrt{x^2\sqrt[3]{x^{-10}}}$, $x_o = 1$. (h) $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$, $x_o = 1$.

(i) $x \mapsto \ln(x^2+1)$, $x_o = 0$. (j) $x \mapsto \sqrt{x + e^{x+1}}$, $x_o = 2$.

(k) $x \mapsto x\ln(x)$, $x_o = 1$. (l) $x \mapsto \cos(e^{\sqrt{x}})$, $x_o = 1$.

(m) $x \mapsto |\cos(x)|$, $x_o = \pi$. (n) $x \mapsto \sqrt{|x^2-1|}$, $x_o = 3$.

(o) $x \mapsto \tan(x^2-1)$, $x_o = 0$. (p) $x \mapsto \arctan(e^x)$, $x_o = 0$.

Exercice 5. Considérons la fonction f définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer la dérivée de f puis montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 6. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

(a) étudier la continuité de f.

(b) Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 1$ mais n'est pas dérivable en 1.

(c) Montrer que f' a une limite finie quand x tend vers 1.

(d) Montrer que : $\forall x > 1$, $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{3\pi}{4} + \arctan x$.

Exercice 7. Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ et $I = [2, 4]$,
(b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ et $I = [-1, 1]$,
(c) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$ et $I = [-2, 2]$,
(d) $f(x) = (x^2 + 2x)^3$ et $I = [-2, 1]$,
(e) $f(x) = x + \sin(2x)$ et $I = [0, \pi]$,
(f) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $I = [1, 3]$.

Exercice 8. Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim_1 \frac{x^\beta - 1}{x^\alpha - 1}$,
(b) $\lim_0 \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$,
(c) $\lim_0 \frac{e^{3x}-1}{x}$,
(d) $\lim_0 \frac{e^x - 1}{x^3}$,
(e) $\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$,
(f) $\lim_0 \frac{5^x - 3^x}{x}$,
(g) $\lim_0 \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$,
(h) $\lim_1 \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$,
(i) $\lim_1 \frac{\cos(x)\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)}$,
(j) $\lim_0 \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$,
(k) $\lim_0 \frac{\tan(x) - x}{x^3}$,
(l) $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$,
(m) $\lim_1 \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$,
(n) $\lim_{+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$.

Exercice 9. Soit f la fonction de variable réelle définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$.

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
(b) Montrer que f se prolonge par continuité au point 0 en une fonction φ que l'on précisera.
(c) Montrer que φ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de φ.
(d) étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

Exercice 10. On veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Donner les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes (Ox) et (Oy).
2. Donner les limites en l'infini.
3. Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.
4. Calculer f''. En déduire si f est convexe, concave et dans quels intervalles.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 11. On veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Donner les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes (Ox) et (Oy).
3. Donner les limites en l'infini.
4. Déterminer les asymptotes (verticales, horizontales/obliques).
5. Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variation de f.
6. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 12. On veut étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Donner les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes (Ox) et (Oy).
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$, justifier votre réponse ?
3. étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et donner une équation des asymptotes si elles existent.
4. étudier la dérivabilité de f. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle des tangentes aux points d'abscisse -1 et 1 ? Justifier votre réponse.
5. Calculer la dérivée de f sur $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$, puis sur $]-1, 1[$. En déduire le tableau de variation de f.
6. étudier la dérivabilité de f' et calculer f''. En déduire si f est convexe, concave et dans quels intervalles.
7. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 13. étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. Utiliser son tableau de variation pour trouver, après avoir fixé $x > 0$, le nombre de solutions de l'équation $x^y = y^x$ d'inconnue $y > 0$.

Exercice 14. On pose : $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$.

1. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a-b)^3 + 3(a-b) = a^3 - b^3 + (3 - 3ab)(a-b)$.
2. étudier : $f : x \mapsto x^3 + 3x$, et donner son tableau de variation.
3. Si $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}$, $b = \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$, calculer ab et $a^3 - b^3$.
4. Prouver que $A = 2$.