Ch. 2. Nombres complexes

(J-Y Ducloux)

<u>Plan</u>
I. Rappels
II. Puissance et racine n^{e}

I. Rappels

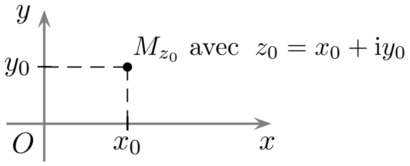
1. Coordonnées cartésiennes

Définition (Gauss, 1837)

hors programme

(a) On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication suivantes :
$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ et $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ pour $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
On en déduit l'inclusion $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ en « identifiant » $x\in\mathbb{R}$ à $(x,0)$.
On pose ensuite $\mathrm{i}:=(0,1)$, donc $\mathrm{i}^2=-1$ et : $\underbrace{x}_{\text{plutôt }(x,0)}+\mathrm{i}\underbrace{y}_{\text{plutôt }(y,0)}=(x,y)$ quand $x,y\in\mathbb{R}$.

(b) Géométriquement :



M_{z_0} : *image de* z_0

z_0 : *affixe de* M_{z_0}

$\operatorname{Re} z_0 := x_0$ et $\operatorname{Im} z_0 := y_0$

$\overline{z_0} := x_0 - \mathrm{i}y_0$

$|z_0| := \sqrt{z_0\overline{z_0}} = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$

Proposition

Soient $z,u,v,w\in\mathbb{C}$. On dispose d'abord de règles usuelles comme sur $\mathbb{R}$.(*)

(a) On a : $\overline{\overline{z}}=z$ et $|\overline{z}|=|z|$, $\operatorname{Re} z=\frac{z+\overline{z}}{2}$ et $\operatorname{Im} z=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$, $|\operatorname{Re} z|\le|z|$ et $|\operatorname{Im} z|\le|z|$.

(b) On a : $\overline{u+v}=\overline{u}+\overline{v}$ et $\overline{uv}=\overline{u}\,\overline{v}$.

(c) Si $z\neq0$; on a : $\boxed{\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}}$ et $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.

(d) On a : $|uv|=|u||v|$ et $\boxed{|u+v|\le|u|+|v|}$ « inégalité triangulaire ».

Remarque

En appliquant le (d) de la proposition à $(u-v)+v$ et à $(v-u)+u$, on obtient aussi :

$$\boxed{||u|-|v||\le|u-v| \text{ pour } u,v\in\mathbb{C}}.$$

2. Exponentielle, coordonnées polaires

Notations

(a) Soit $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ avec $x,y\in\mathbb{R}$.
On pose $\underbrace{\mathrm{e}^z}_{\text{noté aussi }\exp z}:=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$ donc $\boxed{\mathrm{e}^z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}$.

(b) Soient $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$. On rappelle qu'on écrit $\theta\equiv\theta'\ [2\pi]$ et lit θ *est congru à* θ' *modulo* 2π pour indiquer que $\theta-\theta'\in2\pi\mathbb{Z}$, où $2\pi\mathbb{Z}:=\{2\pi n\ ;\ n\in\mathbb{Z}\}$.

(*) On a :
(i) $(u+v)+w=u+(v+w)$ et $u+v=v+u$;
(ii) $(uv)w=u(vw)$ et $uv=vu$;
(iii) $u(v+w)=(uv)+(uw)$ et $(u+v)w=(uw)+(vw)$.

De plus :
(iv) $z+0=z$ et il existe $z'\in\mathbb{C}$ tel que $z+z'=0$ (un tel z' est unique et noté $-z$) ;
(v) $z1=z$ et lorsque $z\neq0$ il existe $z''\in\mathbb{C}$ tel que $zz''=1$ (un tel z'' est unique et noté $\frac{1}{z}$).

Il en résulte que : $\boxed{uv=0 \iff (u=0 \text{ ou } v=0)}$. Lorsque $v\neq0$, on note comme d'habitude : $\frac{u}{v}=u\times\frac{1}{v}$.

Remarque

On déduit de cette notation que : $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R}}$.

Les formules $\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}}$ s'appellent *les formules d'Euler.*

Proposition

Soient $z, u, v \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) On a : $\overline{\mathrm{e}^{z}} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

(b) On a : $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{e}^{v}$ donc $\frac{1}{\mathrm{e}^{u}} = \mathrm{e}^{-u}$, puis $\mathrm{e}^{u-v} = \frac{\mathrm{e}^{u}}{\mathrm{e}^{v}}$.

(c) On a : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \iff \alpha \equiv \beta\ [2\pi]$.
En particulier : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \underbrace{1}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}} \iff \alpha \equiv 0\ [2\pi]$.

Remarque

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. L'égalité $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ issue du (b) permet de retrouver facilement les formules qui relient $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$ à $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\sin(\alpha)$, et $\sin(\beta)$.

Définition-Proposition

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) On appelle *un argument de* z, et note par abus « $\arg z$ » (il n'y a pas unicité), tout nombre réel θ, tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

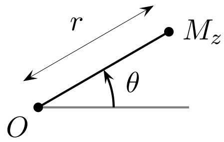
(b) Il existe un argument θ de z. Les arguments de z sont les réels congrus à θ modulo 2π.
L'unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$ est appelé *argument principal de* z et noté $\operatorname{Arg} z$.

Définition

Soient $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ d'image M_z avec $x, y \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

On a : $$\underbrace{\begin{cases} r = |z| \\ \theta \equiv \arg z\ [2\pi] \end{cases}}_{\text{signifie que } \theta \text{ est un argument de } z} \iff \underbrace{\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \frac{z}{r} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \end{cases}}_{\text{traduit sur la figure}} \iff \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \iff z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

On dit que (r, θ) *est un couple de coordonnées polaires de* z (ou de M_z) quand $\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$, c'est-à-dire quand $\boxed{(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)}$.



Proposition

Soient $u, v, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) On a : $\arg(uv) \equiv \arg(u) + \arg(v)\ [2\pi]$ et $\arg\left(\frac{u}{v}\right) \equiv \arg(u) - \arg(v)\ [2\pi]$.
On en déduit que : $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$, $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

(b) On a : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

3. Transformations géométriques du plan

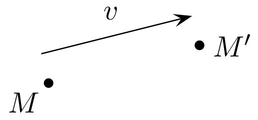
Notation

Soient $U = (a, b), V = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. On pose : $\overbrace{\overrightarrow{UV}}^{\text{penser à } \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OU}} = V - U = (c-a, d-b)$.
On a donc : $\|\overrightarrow{UV}\| = |u - v|$ en notant $u := a + \mathrm{i}b$ et $v := c + \mathrm{i}d$ les affixes de U et V.

Définition

Soient $v, \Omega \in \mathbb{R}^2$ d'affixes b, ω et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

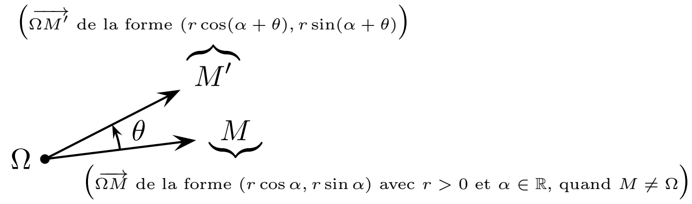
(a) L'application $t_v\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'}\end{array}$ avec $\underbrace{\overrightarrow{MM'} = v}_{\text{c'est-à-dire } \boxed{z'-z=b}}$ s'appelle *la translation de vecteur v*.



(b) L'application $h_{\Omega,\lambda}\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'}\end{array}$ avec $\underbrace{\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\,\overrightarrow{\Omega M}}_{\text{c'est-à-dire } \boxed{z'-\omega=\lambda\,(z-\omega)}}$ s'appelle *l'homothétie de centre Ω et de rapport λ* .

(c) L'application $r_{\Omega,\theta}\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'}\end{array}$ avec $\begin{cases}(u,v) := \overrightarrow{\Omega M}\\ (u',v') := \overrightarrow{\Omega M'}\end{cases}$ tels que $\underbrace{\begin{cases}u' = (\cos\theta)u - (\sin\theta)v\\ v' = (\sin\theta)u + (\cos\theta)v\end{cases}}_{\text{c'est-à-dire } \boxed{z'-\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,(z-\omega)}}$

s'appelle *la rotation de centre Ω et d'angle θ*.



Remarque

Soient $\Omega, A, B \in \mathbb{R}^2$ d'affixes ω, a, b tels que $A \neq \Omega$ et $B \neq \Omega$.

On appelle *mesure en radian de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})$ et note $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}})$ tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$r_{\Omega,\theta}(A_1) = B_1$, en introduisant $A_1, B_1 \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{\Omega A_1} = \frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\|\overrightarrow{\Omega A}\|}$ et $\overrightarrow{\Omega B_1} = \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\|\overrightarrow{\Omega B}\|}$.

Ainsi, on a : $\boxed{\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right)\ [2\pi]}$.

Définition

Soient $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $M \in \mathbb{R}^2$.
On dit que M *est un point fixe de f* si $f(M) = M$.

Proposition

Soient $v, \Omega \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$. On utilise les notations de la définition précédente.

(a) On suppose que $v \neq 0$. L'application t_v n'a aucun point fixe.

(b) On suppose que $\lambda \neq 1$. L'application $h_{\Omega,\lambda}$ a pour unique point fixe Ω.

(c) On suppose que $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. L'application $r_{\Omega,\theta}$ a pour unique point fixe Ω.

Proposition (exercice)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On note $O := (0,0)$.

(a) L'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'} \end{array}$ avec $z' = z + b$ est la translation de vecteur l'image de b.

(b) L'application $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'} \end{array}$ avec $z' = az$ s'écrit $h \circ r$ et $r \circ h$, où h est l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$, et, r est la rotation de centre O et d'angle $\arg a$.

(c) L'application $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'} \end{array}$ avec $z' = \overline{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe (Ox).

hors programme

Remarque (description des « similitudes du plan »)

Les applications $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles qu'il existe $k > 0$ vérifiant $\|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = k\|\overrightarrow{MN}\|$ pour tous $M, N \in \mathbb{R}^2$ sont exactement les applications d'une des deux formes suivantes :

- $f_{\text{directe}}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'} \end{array}$ avec $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$ sont fixés ;
- $f_{\text{indirecte}}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \underbrace{M}_{\text{d'affixe } z} & \mapsto & \underbrace{M'}_{\text{d'affixe } z'} \end{array}$ avec $z' = a\overline{z} + b$, où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{C}$ sont fixés.

II. Puissance et racine n^{e}

1. Équation du second degré

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche les « racines carrées de z_0 » (« racines 2^e de z_0 »), c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Remarque

L'équation $z^2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution $z = 0$

Proposition (racines carrées en coordonnées polaires)

Soit $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a deux solutions qui sont : $\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Exemple

On choisit $z_0 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Les racines carrées de $1 + \mathrm{i}$ sont : $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $-2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

Proposition (racines carrées en coordonnées cartésiennes)

Soit $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - y^2 = x_0 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = y_0 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ \boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \text{(égalité des modules, redondante)} \end{array} \right. .$$

Ce point de vue permet de résoudre l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, en commençant par chercher x^2 et y^2 avec une condition de signe pour xy.

Exemple

On choisit $z_0 = 1 + \mathrm{i}$. Pour tout $z = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{x}} + \mathrm{i}\underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{y}} \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^2 = 1+\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ 2xy = 1 \end{cases}.$$

Les deux racines carrées de $1+\mathrm{i}$ sont $\underbrace{\text{donc}}_{\text{(la condition } xy>0 \text{ les impose)}}$: $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta := b^2 - 4ac$ et fixe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont :

$$\boxed{-\frac{b}{2a} \text{ si } \Delta = 0, \quad \text{ou,} \quad \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \frac{-b+\delta}{2a} \text{ (distinctes) si } \Delta \neq 0}.$$

2. Puissance n^{e}

Notation

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pose : $z^0 = 1$ et $z^n = \overbrace{z \times \cdots \times z}^{n \text{ termes (récurrence)}}$ quand $n \geq 1$.
On note ensuite : $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$ quand $n < 0$ et $z \neq 0$.

Lorsque $p, q \in \mathbb{N}$, ou $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $z \neq 0$, on obtient facilement :

$$z^p\, z^q = z^{p+q} \quad \text{et} \quad (z^p)^q = z^{pq}.$$

Remarque

Les propriétés habituelles des sommes partielles des suites arithmétiques et géométriques de nombres réels restent valables pour les suites de nombres complexes (cf. la suite du cours).

Par exemple, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, on a :

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

car $(1-z)(1+z+\cdots+z^n) = (1-z) + (z-z^2) + \cdots + (z^n - z^{n+1}) = 1 - z^{n+1}$.

à simplifier à simplifier à simplifier

Proposition « formule de Moivre »

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
On a : $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, ce qui s'écrit aussi $\boxed{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$.

Notation

(a) On note : $\boxed{0! = 1}$ et $\boxed{n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n}$ « factorielle n », quand $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

(b) On note : $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{\text{si } k \neq 0}{=} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}}$ « k parmi n », quand $n, k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$.

Proposition

On a : $\boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$ quand $n, k \in \mathbb{N}$ vérifient $1 \leq k \leq n$.

Cela donne un algorithme pour construire la table des $\binom{n}{k}$, appelée « triangle de Pascal » :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4 +	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Proposition « formule du binôme de Newton »

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On notera $\sum\limits_{k=0}^{n} z_k := z_0 + \cdots + z_n$ lorsque $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$.

On a : $\boxed{(u+v)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} u^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} u^{n-1} v + \binom{n}{2} u^{n-2} v^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} v^n}$.

Remarque

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. La formule du binôme permet de calculer les parties réelles $\cos(n\theta)$ et imaginaires et $\sin(n\theta)$ de $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ à l'aide des réels $\cos^k \theta$ et $\sin^k \theta$, avec $0 \le k \le n$.

2. La formule du binôme permet aussi d'exprimer $\cos^n \theta$ qui vaut $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$ et $\sin^n \theta$ qui vaut $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^n$ à l'aide des réels $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, avec $0 \le k \le n$.

Exemple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. On a : $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta$.

2. On a aussi : $\cos^3\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\right) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta$.

3. Racine n^{e}

Dans ce paragraphe, on fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proposition

Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

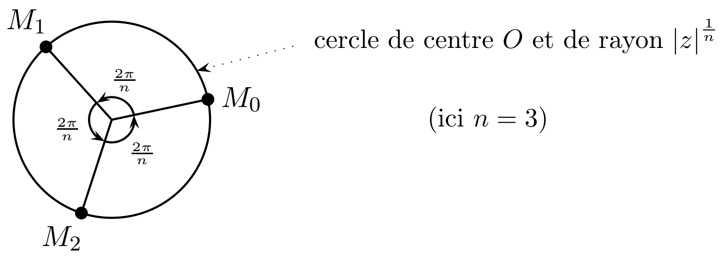
L'équation $Z^n = z$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a n solutions qui sont :

$$Z_k := r^{\frac{1}{n}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \text{où} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Remarques

1. L'équation $Z^n = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution 0 (clair).

2. Les images M_0, ..., M_{n-1} de Z_0, ..., Z_{n-1} (cf. la proposition) dans $\mathbb{R}^2$ sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{n}}$:



En effet, on a : $\quad \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM}_{\underbrace{k+1}_{0 \text{ si } k=n-1}}}) \equiv \arg Z_{k+1} - \arg Z_k \equiv \frac{2\pi}{n} \;\; [2\pi]$ quand $0 \leq k \leq n-1$.

Définition

(a) On appelle racine n^{e} de l'unité toute solution de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(b) On dit qu'une racine n^{e} de l'unité ζ est *une racine primitive* si le plus petit $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\zeta^l = 1$ est égal à n.

Proposition

(a) Les racines n^{e} de l'unité sont les n nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Leur somme, qui vaut donc $\sum_{k=0}^{n-1} \big(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\big)^k$, est égale à 0 quand $n \geq 2$.

(b) Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. La racine n^{e} de l'unité $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ est une racine n^{e} primitive de l'unité si et seulement si le seul diviseur $d \in \mathbb{N}$ commun à k et n est 1.

Exemple

Les racines 4^{e} de l'unité sont 1, i, -1, $-\mathrm{i}$.

Les racines 4^{e} primitives de l'unité sont i et $-\mathrm{i}$.