Université Paris-Diderot — Année 2018-2019

MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

II. Nombres complexes

Exercice 1. écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(a) $\dfrac{2}{1-2\mathrm{i}}$, (b) $\dfrac{1}{1-2\mathrm{i}}+\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}$, (c) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$,

(d) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2$, (e) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$, (f) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-\dfrac{2-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$.

Exercice 2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

(a) $-3\sqrt{2}$, (b) $\pi\mathrm{i}$, (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$,

(d) $(1-\mathrm{i})^9$, (e) $(\sqrt{5}-\mathrm{i})(\sqrt{5}+\mathrm{i})$, (f) $e^{3+4\mathrm{i}}$.

Exercice 3. écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

(a) $-3\sqrt{2}$, (b) $\pi\mathrm{i}$, (c) $\sqrt{3}-\mathrm{i}$,

(d) $(\mathrm{i}-1)^9$, (e) $\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathrm{i}$, (f) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$,

(g) $\mathrm{i}+\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, (h) $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, (i) $\overline{\sqrt{3}\mathrm{i}}+e^{-\mathrm{i}\pi}$,

(j) $3+4\mathrm{i}$, (k) $x+x^2\mathrm{i}$, $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 4. Déterminer les nombres complexes z tels que :

(a) $|\overline{z}-\mathrm{i}|=1$, (b) $z^2=\overline{z}$,

(c) $z\overline{z}=z^3$, (d) $\mathrm{i}\,\mathrm{Re}(z^2)-\mathrm{Im}(z^2)=z$,

(e) $z^2+\overline{z}-1$ est réel, (f) $z^2+2\overline{z}-2$ est imaginaire pur,

(g) $\arg(z+2\overline{z})=\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$.

Exercice 5. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ un nombre réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$,

(b) $z^4-2\cos(2\theta)z^2+1=0$.

Exercice 6. Soient $z_1=3\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$, $z_2=\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

(a) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z_1 et z_2.

(b) Déterminer la forme cartésienne de $z=\frac{z_1}{z_2^2}$.

(c) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de z.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 7. Soit $w=1+\mathrm{i}$.

(a) Déterminer les racines carrées de w sous forme cartésienne.

(b) Déterminer les formes exponentielle et trigonométrique de w et ses racines carrées.

(c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 8. Trouver les racines carrées complexes des nombres suivants :

(a) 1, (b) i, (c) $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, (d) $1+\mathrm{i}$,

(e) $6-8\mathrm{i}$, (f) $\mathrm{i}-2$, (g) $2e^{\mathrm{i}2\pi/5}$, (h) $-5-12\mathrm{i}$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2-\mathrm{i}z+2=0$, (b) $(3-\mathrm{i})z^2+(4\mathrm{i}-2)z-8\mathrm{i}+4=0$,

(c) $z^2+2\mathrm{i}z-1=0$, (d) $z(z-\mathrm{i})=\mathrm{i}z+2$,

(e) $z^2-3z+3+\mathrm{i}=0$, (f) $z^4+2z^3+4z^2=0$,

(g) $z^3-3z^2+4z-2=0$.

Exercice 10. Exprimer comme produit de facteurs linéaires les polynômes suivants :

(a) $\mathrm{i}z^2-1$, (b) z^2-3z+2,

(c) z^4+1, (d) $z^4-3\mathrm{i}z^3-(1+3\mathrm{i})z^2$,

(e) z^3+z^2+z+1, (f) $2z^2+\mathrm{i}z-3$,

(g) $z^2-2z+4\mathrm{i}$, (h) $\mathrm{i}z^3+(1-2\mathrm{i})z^2+2(\mathrm{i}-1)z+2$.

Exercice 11. L'objectif de cet exercice est d'écrire sous forme “explicite” (au moyen de racines carrées de nombres réels) les nombres $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

(a) Ecrire les formes trigonométrique et exponentielle des racines 5-èmes de l'unité, et les dessiner de façon approximative dans le plan cartésien.

(b) Soit $z=x+\mathrm{i}y$ une racine 5-ème de l'unité. Montrer que le quotient y/x peut prendre au plus cinq valeurs possibles, qu'on déterminera.
Indication : utiliser l'égalité $z^5/x^5=(1+\mathrm{i}\,y/x)^5$ pour calculer y/x.

(c) Trouver la valeur de $\tan\frac{2\pi}{5}$ puis de $\tan\frac{\pi}{10}$.

(d) Trouver la valeur de $\tan\frac{4\pi}{5}$ puis de $\tan\frac{\pi}{5}$.

(e) En utilisant le fait que $\cos^2+\sin^2=1$, en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 12. (a) Soit $\mu=(\sqrt{5}-1+\mathrm{i}\sqrt{10+2\sqrt{5}})/4$. Montrer que $\mu=e^{\mathrm{i}2\pi/5}$.

(b) écrire sous forme cartésienne $z=e^{\mathrm{i}\pi/3}$.

(c) écrire μ/z sous forme trigonométrique, exponentielle et cartésienne.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{15}$ et $\sin\frac{\pi}{15}$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^4+1=0$, (b) $z^5+1=0$, (c) $z^6=\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$,

(d) $\overline{z}^2-2\mathrm{i}\overline{z}+\mathrm{i}=0$, (e) $z^4+2z^2+4=0$, (f) $z^6-2\mathrm{i}z^3-1=0$.

à partir de (b), déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 14. (a) Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 4-èmes de $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

(b) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 15. (a) Déterminer les formes cartésiennes, trigonométriques et exponentielles des racines 8-èmes de l'unité.

(b) Dessiner les racines 8-èmes de l'unité dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue en joignant les racines avec arguments consécutifs.

(c) Lesquelles sont des racines 8-èmes primitives ?

Exercice 16. (a) Donner une racine 6-èmes primitive de l'unité sous formes cartésienne et exponentielle.

(b) Vérifier que $2+\mathrm{i}$ est une racine 6-ème de $w=-117+44\mathrm{i}$.

(c) Déterminer les formes exponentielle et cartésienne de toutes les racines 6-èmes de w.

(d) Dessiner les racines 6-èmes de w dans le plan cartésien, et décrire la figure obtenue en joignant les racines avec arguments consécutifs.

Exercice 17. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer :

(a) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$, (b) $(1+\mathrm{i})^n-(1-\mathrm{i})^n$, (c) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{2n}$.

Exercice 18. (a) Exprimer $\cos(2\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

(b) Exprimer $\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\frac{\alpha}{2}$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

(c) Sachant que $\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$, donner les valeurs de $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

Exercice 19. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer les expression suivantes :

(a) $(a+b)^6$, (b) $(x+\mathrm{i}y)^4$, (c) $(1+\mathrm{i})^5$,

(d) $(1-2\mathrm{i})^3$, (e) $(10+1)^4$, (f) $(a+b+c)^3$.

Exercice 20. Exprimer en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos(4\alpha)$, (b) $\sin(4\alpha)$, (c) $\cos(5\alpha)$,

(d) $\sin(5\alpha)$, (e) $\cos(3\alpha)\sin(3\alpha)$, (f) $\sin(6\alpha)$.

Exercice 21. Linéariser les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos^3\alpha$, (b) $\sin^3\alpha$, (c) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$,

(d) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$, (e) $\cos^5\alpha$, (f) $\sin^5\alpha$.

Exercice 22. Exprimer en fonction de $\tan\alpha$ les formules trigonométriques suivantes :

(a) $\cos(2\alpha)$, (b) $\sin(2\alpha)$, (c) $\cos(4\alpha)$, (d) $\sin(4\alpha)$,

(e) $\tan(2\alpha)$, (f) $\tan(3\alpha)$, (g) $\tan(4\alpha)$, (h) $\tan(5\alpha)$.

Exercice 23. Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\alpha)$.

Exercice 24. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal centré en 0 on considère les points A, B et M d'affixe respective $1+\mathbf{i}$, $1-\mathbf{i}$ et $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi/3}$.

(a) Placer les points A, B et M dans le plan complexe.

(b) Ces points sont-ils alignés ?

(c) Calculer le module et l'argument de $1-\mathbf{i}$.

(d) Ces points sont-ils sur un même cercle de centre 0 ? Si oui, quel est le rayon de ce cercle ?

Exercice 25. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal centré en 0 on considère les points A, B, O et M d'affixe respective $\mathbf{i}$, $2-\mathbf{i}$, 0 et z.

(a) Supposons que $z=1$. Placer les points A, B et M dans le plan complexe. Les points A, B et M sont-ils alignés ?

(b) Supposons que $z=1+\mathbf{i}$. Placer les points A, B et M dans le plan complexe. Quel est le module de z ? Quel est l'argument de z ? Le triangle est-il rectangle en M ?

Exercice 26. On considère les applications $f,\, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ données par

$$f(z) = 2z + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad g(z) = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} z + 3.$$

(a) Déterminer si f définit une rotation/une homothétie, et calculer le centre et l'angle/le rapport de f le cas échéant.

(b) Déterminer les ensembles des points invariants des applications $u = f \circ g$ et $v = g \circ f$. L'application u est-elle une rotation/une homothétie ? L'application v est-elle une rotation/une homothétie ?

Exercice 27. Pour tout nombre complexe t, on définit la transformation

$$f_t\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto (t+\mathrm{i})z - 1.$$

(a) Déterminer pour quelles valeurs de t la transformation f_t est une homothétie, respectivement une rotation, respectivement une translation.

(b) Supposons $t = 0$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de f_0 suivant que f_0 est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.

(c) Supposons $t = 2 - \mathrm{i}$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de $f_{2-\mathrm{i}}$ suivant que $f_{2-\mathrm{i}}$ est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.

(d) Supposons $t = 1 - \mathrm{i}$, calculer le vecteur de translation, ou le centre et l'angle/le rapport de $f_{1-\mathrm{i}}$ suivant que $f_{1-\mathrm{i}}$ est une translation, respectivement une rotation, resp. une homothétie.