Ch. 3. Introduction à l'algèbre linéaire (J-Y Ducloux)

I. Systèmes linéaires

← [idem avec $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$]

1. Introduction

Deux problèmes

1. Comment passer d'une $\overbrace{\text{équation cartésienne}}^{\text{(image réciproque d'un singleton par une application)}}$ d'un « sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$ » à une équation paramétrique qui décrit les points de ce sous-espace affine ? Par exemple :

$$(E_{\text{cart}})\begin{cases} -4x+12y-5z = \;\;1 \\ \quad x-3y+2z = -1 \\ \quad 2x-6y+z = \;\;1 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \text{ détermine } \mathscr{S}_{E_{\text{cart}}} := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid E_{\text{cart}}\}.$$

2. Comment passer d'une $\overbrace{\text{équation paramétrique}}^{\text{(image directe d'une application)}}$ d'un « sous-espace affine de $\mathbb{R}^p$ » à une équation cartésienne de ce sous-espace affine ? Par exemple :

$$\mathscr{D}\colon \begin{cases} x = \;\;s-t+1 \\ y = -s+t+2 \end{cases},\ s,t\in\mathbb{R} \quad \text{détermine} \quad \mathscr{D} := \{(s-t+1,-s+t+2)\ ;\ s,t\in\mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Une motivation

De nombreuses équations issues de la physique se résolvent numériquement (par « discrétisation ») en se ramenant à des « systèmes linéaires », cf. :
`http://math.nist.gov/MatrixMarket/` (cliquer sur « Search by application area »).

But

On désire « résoudre » des équations comme (E_{cart}) au sens où on écrira $\mathscr{S}_{E_{\text{cart}}}$ sous forme paramétrique, sous réserve d'avoir $\mathscr{S}_{E_{\text{cart}}} \neq 0$. On va utiliser une méthode qui permettra aussi de passer d'une forme paramétrique à une forme cartésienne. Plus précisément, on cherche :
– une forme paramétrique sans paramètre inutile (ce n'est pas le cas dans la définition de $\mathscr{D}$ où tout s'exprime avec $u := s-t$) ;
– une forme cartésienne sans égalité inutile (ce n'est pas le cas dans l'écriture de (E_{cart}) où ligne 3 $=$ $-$ligne 1 $-$ 2 ligne 2).

2. Transformation d'un système linéaire

Définition

(a) Un système *d'équations « linéaires » de n équations à p inconnues dans* $\mathbb{R}$ est du type :

$$(E)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1p}x_p &= b_1 \\ \qquad\ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{np}x_p &= b_n \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$$

où sont donnés $a_{11},\ldots,a_{1p},a_{21},\ldots,a_{2p},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{np}\in\mathbb{R}$ et $b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$.

Dans la suite du I on fixe un tel système (E) et note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{R}^p$.

(b) Le *système d'équations linéaires homogène associé à* (E) est le système suivant :

$$(H)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1p}x_p &= 0 \\ \qquad\ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{np}x_p &= 0 \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p.$$

Remarques (importantes)

1. (H) admet toujours comme solution $(0, \ldots, 0)$.

2. On suppose que $\mathscr{S}_E \neq \emptyset$ et fixe une solution « particulière » $(x_1^E, \ldots, x_p^E)$ de (E).
Pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a tout de suite :

$(x_1, \ldots, x_p)$ vérifie (E) si et seulement si $(x_1 - x_1^E, \ldots, x_p - x_p^E)$ vérifie (H).

En résumé : $\boxed{\text{solutions de } (E) = \text{solutions de } (H) + \text{une solution particulière de } (E)}$.

Notations

(a) On utilisera les « matrices » suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1p} \\ \cdots \\ a_{n1} \ldots a_{np} \end{pmatrix} \textit{ matrice de } (E),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \underbrace{\textit{inconnue}}_{\text{identifiée à } (x_1, \ldots, x_p)}, \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \textit{ second membre de } (E).$$

On écrira en abrégé $(E) : AX = B$.

(b) La *matrice augmentée* de (E) est la matrice $(A|B) := \left(\begin{array}{c|c} a_{11} \ldots a_{1p} & b_1 \\ \cdots & \vdots \\ a_{n1} \ldots a_{np} & b_n \end{array}\right)$, où la barre verticale n'a aucune signification mathématique.

On résoudra (E) en travaillant sur les lignes de $(A|B)$ et sur les colonnes de A.

Exemples (cf. 1)

1. $\underbrace{\text{L'équation}}_{\text{d'inconnue } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3}$ $(E_{\text{cart}}) \begin{cases} -4x + 12y - 5z = 1 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 2x - 6y + z = 1 \end{cases}$ a pour matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 12 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

2. On fixe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $(x, y) \in \mathscr{D} \iff \left(\exists (s,t) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = s - t + 1 \\ y = -s + t + 2 \end{cases}\right)$.

$\underbrace{\text{L'équation}}_{\text{d'inconnue } (s,t) \in \mathbb{R}^2}$ $(E_{\text{param}}) \begin{cases} s - t = x - 1 \\ -s + t = y - 2 \end{cases}$ a pour matrice augmentée $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \end{array}\right)$.

Définition

Dans ce qui suit on va noter L_1, ..., L_n les lignes de $(A|B)$ et C_1, ..., C_p les colonnes de A. On désignera par L_1', ..., L_n' les nouvelles lignes après transformation.

(a) Une *opération élémentaire sur les lignes de* $(A|B)$ est une des transformations suivantes :

(i) $L_i \overset{(\text{échange})}{\longleftrightarrow} L_j$ avec $i \neq j$ « permutation de deux lignes » ;
(ii) $L_i' = c\,L_i$ avec $c \neq 0$ « multiplication d'une ligne par un scalaire non-nul » ;
(iii) $L_i' = L_i + cL_j$ avec $i \neq j$ et $c \in \mathbb{R}$ « ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne ».

(b) Une *permutation de deux colonnes* de A est une transformation $C_i \overset{(\text{échange})}{\longleftrightarrow} C_j$ avec $i \neq j$.

Remarque

Pour toute opération élémentaire f sur les lignes des matrices à n lignes et p (resp. $p+1$) colonnes et toute permutation g de deux colonnes de ces matrices, on a : $g \circ f = f \circ g$.

Lemme

Soit $(A'|B')$ une matrice obtenue à partir de $(A|B)$ après avoir effectué un nombre fini d'étapes de l'un des deux types suivants :
$L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$;
$L_i' = c_1L_1 + \cdots + c_iL_i + \cdots + c_nL_n$ avec $1 \leq i \leq n$, $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ et $\underline{\underline{c_i \neq 0}}$.
Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$, le système $(E) : AX = B$ équivaut au système $(E') : A'X = B'$.

Exemple

On va écrire une suite de matrices augmentées associées à des systèmes linéaires équivalents.

On peut commencer la résolution de (E_{cart}) ainsi, en entourant le « pivot » :

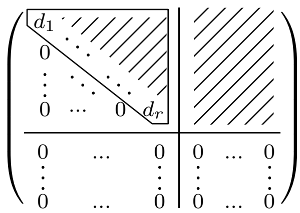
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 12 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{(pour utiliser le pivot 1, ce} \\ \text{qui n'est pas indispensable)}}]{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -4 & 12 & -5 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2' = L_2 + 4L_1 \\ \text{puis } L_3' = L_3 - 2L_1 \\ \text{(pour amener des 0 dans } C_1 \\ \text{strictement sous la diagonale)}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ \boxed{0} & 0 & 3 & -3 \\ \boxed{0} & 0 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

3. Méthode du pivot de Gauss

On va travailler sur les colonnes de A dans $(A|B)$ en allant de la gauche vers la droite pour se ramener à un système triangulaire. À chaque étape on va chercher un scalaire non-nul (« pivot ») vers le bas à partir du terme diagonal, et éventuellement à droite ce qui nécessitera de faire un échange de colonnes $^{(*)}$. On amène ce pivot sur la diagonale puis des 0 sous ce pivot.

Proposition

a) On peut passer par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes et d'échanges de deux colonnes, de la matrice A à une matrice de la forme

$A' =$  avec $d_1 \neq 0, \ldots, d_r \neq 0$.

b) Le système (E) : $AX = B$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ équivaut au système (E') : $A'X' = B'$ d'inconnue $X' := \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_p} \end{pmatrix}$, où les transformations du (a) envoient $\left(\overset{x_1 \ldots x_p}{A} \,\middle|\, B\right)$ sur $\left(\overset{x_{j_1} \ldots x_{j_p}}{A'} \,\middle|\, B'\right)$.

[Noter que les lettres qui se trouvent au-dessus de A ou de A' représentent ici les noms des variables-coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et non pas les valeurs particulières qu'elles prennent pour le vecteur X. De plus, ce sont les éventuels échanges de colonnes qui feront passer de $x_1, \ldots, x_p$ à $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$.]

c) On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $B' = \begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix}$.

On a : $\quad \mathscr{S}_E \neq \emptyset \iff \underbrace{b_{r+1}' = \cdots = b_n' = 0}_{n-r \text{ conditions}}$.

Dans ce cas, on obtient une équation paramétrique de $\mathscr{S}_E$ à partir de (E') en écrivant successivement $x_{j_r}, \ldots, x_{j_1}$ en fonction des paramètres $\underbrace{t_1 := x_{j_{r+1}}, \ldots, t_{p-r} := x_{j_p}}_{p-r \text{ paramètres}}$.

Ainsi, quand $r = n = p$ (« système de Cramer ») le système (E) a une unique solution.

Remarques

En pratique, on exploitera la proposition précédente en allégeant la présentation :

– lorsque $B = 0$ on ne fera pas apparaître la dernière colonne (seconds membres nuls) ;

– on n'introduira les noms des variables au dessus des p premières colonnes qu'à partir du moment où un échange de colonnes aura été introduit (ce qui est rarement indispensable) ;

– on travaillera (par exemple) colonne par colonne en acceptant, au moment du travail sur la $j^{\text{ème}}$ colonne, de faire simultanément plusieurs transformations sur les lignes de la forme $L_i' = c_i L_i + c_j L_j$ avec $c_i \neq 0$ et $i > j$ (car on est capable de décomposer effectivement ces

(∗) Les échanges de deux colonnes permettent de minimiser les erreurs d'arrondis sur ordinateur. Dans ce but, en travaillant sur la j^{e} colonne on choisirait comme pivot a_{i_0,j_0} avec $i_0, j_0 \geq j$ tels que $|a_{i_0,j_0}| = \max\limits_{i',j' \geq j} |a_{i',j'}|$.

transformations en successions d'opérations élémentaires sur les lignes) ;
– on résoudra « de tête » le système triangulaire correspondant à la dernière étape de la méthode de Gauss, en partant de la dernière égalité et remontant vers la première.

Exemples (cf. 1)

1. Fin de la résolution de (E_{cart}) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 12 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \underbrace{\ldots}_{\text{déjà vu}} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_3]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[L_3' = L_3 + L_2]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & z & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

En renommant dans la conclusion la variable y en t, et calculant d'abord z puis ensuite x, on obtient l'équation paramétrique suivante de $\mathscr{S}_{E_{\text{cart}}}$:

$$\mathscr{S}_{E_{\text{cart}}} : \begin{cases} x & = \frac{1}{1}(-2(-1) + 3t - 1) = 3t + 1 \\ y & = t \\ z & = \frac{1}{3}(-3) = -1 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Existence de $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(E_{\text{param}}) \begin{cases} s - t = x - 1 \\ -s + t = y - 2 \end{cases}$?

Calcul par la méthode de Gauss : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-1 \\ -1 & 1 & y-2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2' = L_2 + L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & /// \\ 0 & 0 & \underbrace{x+y-3}_{\text{est-ce égal à } 0\,?} \end{array}\right)$.

Ainsi $\mathscr{D} : \begin{cases} x = s - t + 1 \\ y = -s + t + 2 \end{cases}$, $s, t \in \mathbb{R}$ a pour équation cartésienne : $\mathscr{D} : x + y - 3 = 0$.

(Inutile de calculer explicitement les valeurs des paramètres s et t en fonction de x et y.)

3. Le système (E_C) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ se résout ainsi : $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2' = 3L_2 - 2L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 2 \end{array}\right)$.

C'est un système de Cramer d'unique solution donnée par : $\begin{cases} x & = \frac{1}{3}\big(-2(-\frac{2}{7}) + 5\big) = \frac{13}{5} \\ y & = -\frac{2}{7} \end{cases}$.

Remarques

1. Quand (E) a strictement plus d'inconnues que d'équations (c'est-à-dire $p > n$) et $\mathscr{S}_E \neq \emptyset$ (par exemple (E) est homogène), on a : $\underbrace{p - r}_{\text{nombre de paramètres}} > n - r \geq 0$, donc $\mathscr{S}_E$ est infini.

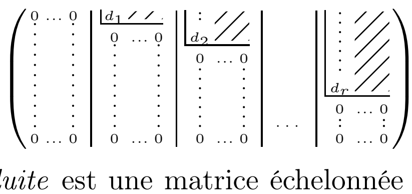
Retenir : tout système linéaire homogène dont le nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations admet une infinité de solutions.

2. La matrice $(A'|B')$ dépend des opérations sur les lignes et les colonnes qu'on a utilisées.

Cependant, on verra dans la suite du cours que :
– r ne dépend que de A, et sera appelé « le rang de A » ;
– $\mathscr{S}_E$ n'a pas d'équation paramétrique avec strictement moins que $p - r$ paramètres ;
– une équation cartésienne obtenue par la méthode de Gauss à partir d'une équation paramétrique a un nombre d'égalités qui est minimal.

Définition (« méthode de Gauss sans échange de colonnes »)

(a) Une *matrice échelonnée* — suivant les lignes — est une matrice telle que le nombre de termes nuls au début de chaque ligne augmente lorsqu'on passe d'une ligne à la suivante, et ce nombre augmente même strictement lorsqu'on passe d'une ligne non nulle à la suivante.

Il s'agit d'une matrice de la forme  avec $d_1 \neq 0$, ..., $d_r \neq 0$.

(b) Une *matrice échelonnée réduite* est une matrice échelonnée dans laquelle les premiers termes non-nuls sur chaque ligne sont des 1 au-dessus desquels se trouvent des 0. Elle s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
0\ \dots\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\
\vdots & 0\ \dots\ 0 & 1 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0\ \dots\ 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & 0\ \dots\ 0 \\
0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 & \dots & 0\ \dots\ 0
\end{array}\right).$$

Proposition

Il existe une unique matrice échelonnée réduite E_A qui se déduit de A par des opérations élémentaires sur les lignes. Elle s'obtient par exemple ainsi :

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ L_{i_0} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0\ \dots\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & x\neq 0 & \\ \vdots & & \\ 0\ \dots\ 0 & & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{puis } L_1 \leftrightarrow L_{i_0}]{L'_{i_0} = \frac{1}{x} L_{i_0}} \begin{pmatrix} 0\ \dots\ 0 & 1 & \\ \vdots & x_2 & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ 0\ \dots\ 0 & x_n & \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{pour } i \neq 1]{L'_i = L_i - x_i L_1} \begin{pmatrix} 0\ \dots\ 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ 0\ \dots\ 0 & 0 & \underbrace{\boxed{}}_{\substack{\text{à réduire en amenant 0}\\ \text{au-dessus de chaque pivot}}} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\dots}_{\text{(récurrence)}} \longrightarrow \quad E_A := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
0\ \dots\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\
\vdots & 0\ \dots\ 0 & 1 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0\ \dots\ 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & 0\ \dots\ 0 \\
0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 & \dots & 0\ \dots\ 0
\end{array}\right).$$

Remarques (lien entre les 2 méthodes de Gauss)

1. En appliquant à A les opérations élémentaires sur les lignes — mais pas sur les colonnes — qui ont permis de passer de A à une matrice A' en travaillant colonne par colonne et n'échangeant deux colonnes que lorsque c'est nécessaire, on obtient une matrice échelonnée. Cette matrice échelonnée s'obtient aussi à partir de A' en permutant les colonnes de $\overset{x_{j_1}\ \dots\ x_{j_p}}{A'}$ pour remettre les coordonnées $x_1, .., x_p$ dans l'ordre.

2. Réciproquement, à partir d'une matrice échelonnée déduite de A par des opérations élémentaires sur les lignes, en déplaçant en premières positions les colonnes contenant les termes non-nuls au début de chaque ligne, on obtient une matrice de la forme A'.

4. Rappels de géométrie affine

Définition-Proposition

(a) On appelle *droite affine de* $\mathbb{R}^p$ toute partie de $\mathbb{R}^p$ de la forme

$$\mathscr{D} = \{A + sv \ ; \ s \in \mathbb{R}\} \quad \text{où} \quad A, v \in \mathbb{R}^p \text{ et } v \neq 0.$$

Dans ce cas on dit que :

– (A, v) est un « repère » de $\mathscr{D}$ et pour tout $M \in \mathscr{D}$ l'unique $s \in \mathbb{R}$ tel que $M = A + sv$ est la « coordonnée » de M dans (A, v) ;

– $\overrightarrow{\mathscr{D}} := \{\overrightarrow{MN} \ ; \ M, N \in \mathscr{D}\}$ est la « direction de $\mathscr{D}$ », telle que $\overrightarrow{\mathscr{D}} = \{sv \ ; \ s \in \mathbb{R}\}$.

(b) Soient $v, w \in \mathbb{R}^p$. On dit que v et w sont *colinéaires* si $v = 0$ ou w est multiple de v.

(c) On appelle *plan affine de* $\mathbb{R}^p$ toute partie de $\mathbb{R}^p$ de la forme

$$\mathscr{P} = \{A + sv + tw \ ; \ s, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{où} \quad A, v, w \in \mathbb{R}^p \text{ et, } v \text{ et } w \text{ sont non colinéaires.}$$

Dans ce cas on dit que :

– (A, v, w) est un « repère » de $\mathscr{P}$ et pour tout $M \in \mathscr{P}$ l'unique couple $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = A + sv + tw$ est le couple des « coordonnées » de M dans (A, v, w) ;

– $\overrightarrow{\mathscr{P}} := \{\overrightarrow{MN} \ ; \ M, N \in \mathscr{P}\}$ est la « direction de $\mathscr{P}$ », telle que $\overrightarrow{\mathscr{P}} = \{sv + tw \ ; \ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Exemples

(a) Les droites affines de $\mathbb{R}^2$ sont :

$$\mathscr{D} \colon ax + by = c \ \text{ avec } \ a, b, c \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ (a, b) \neq (0, 0) \ ;$$

Pour une telle droite $\mathscr{D}$, on a : $\overrightarrow{\mathscr{D}} : ax + by = 0$.

De plus, deux telles droites $\mathscr{D}_1 : a_1x + b_1y = c_1$ et $\mathscr{D}_2 : a_2x + b_2y = c_2$ sont égales si et seulement si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont colinéaires.

(b) Les droites affines de $\mathbb{R}^3$ sont :

$\mathscr{D} : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ avec $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ et, (a, b, c) et (a', b', c') non colinéaires.

Pour une telle droite $\mathscr{D}$, on a : $\overrightarrow{\mathscr{D}} : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$.

(c) Les plans affines de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\mathscr{P} : ax + by + cz = d \text{ avec } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } (a, b, c) \neq (0, 0, 0) ;$$

Pour un tel plan $\mathscr{P}$, on a : $\overrightarrow{\mathscr{P}} : ax + by + cz = 0$.

De plus, deux tels plans $\mathscr{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $\mathscr{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ sont égaux si et seulement si (a_1, b_1, c_1, d_1) et (a_2, b_2, c_2, d_2) sont colinéaires.

Proposition

(a) Soient $A, B \in \mathbb{R}^p$ distincts.
Il existe une unique droite affine de $\mathbb{R}^p$, notée (AB), qui contient A et B.
Elle admet pour repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

(b) Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^p$. Les points A, B, C appartiennent à une même $\overbrace{\text{droite}}^{\text{(affine)}}$ de $\mathbb{R}^p$, ce qui se traduit en disant que « A, B, C sont alignés », si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

(c) Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^p$ non alignés.
Il existe un unique plan affine de $\mathbb{R}^p$, notée (ABC), qui contient A, B et C.
Il admet pour repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

II. L'ESPACE VECTORIEL $\mathbb{R}^n$ ← [idem avec $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$]

Dans toute cette partie on se donne $n \in \mathbb{N}$.

1. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Notations

(a) On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, ..., x_n)$ de réels $x_1, ..., x_n$.
Par convention : $\mathbb{R}^0 := \{0\} \subseteq \mathbb{R}$, en « identifiant » la suite vide () et 0.
On appelle « vecteur » tout élément de $\mathbb{R}^n$ et « scalaire » tout élément de $\mathbb{R}$.

(b) *Somme de deux vecteurs* : $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.
Vecteur nul : $0_{\mathbb{R}^n} := (0, ..., 0)$; *opposé d'un vecteur* : $-(x_1, ..., x_n) := (-x_1, ..., -x_n)$.
Différence de deux vecteurs : $(x_1, ..., x_n) - (y_1, ..., y_n) := (x_1 - y_1, ..., x_n - y_n)$.

(c) *Multiplication d'un scalaire par un vecteur* : $\alpha\,(x_1, ..., x_n) := (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$.

Remarque

Pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :
(i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ et $v + w = w + v$;
(ii) $v + 0_{\mathbb{R}^n} = v$ et $v + (-v) = 0_{\mathbb{R}^n}$
(iii) $\alpha\,(v + w) = (\alpha\, v) + (\alpha\, w)$ et $(\alpha + \beta)\, v = (\alpha\, v) + (\beta\, v)$;
(iv) $1\, v = v$ et $\alpha\,(\beta\, v) = (\alpha\beta)\, v$.

Dans la suite on notera plus simplement, par abus, 0 au lieu de $0_{\mathbb{R}^n}$.

Définition-Proposition

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $v_1, \ldots, v_p, v, w \in \mathbb{R}^n$.

(a) Une *combinaison linéaire* de $v_1, \ldots, v_p$ est un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$v = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p}_{0 \text{ quand } p=0} \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}.$$

(b) On dit que v et w sont *colinéaire* s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v = \alpha w$ ou $w = \alpha v$. Cela équivaut à : $v = 0$ ou $\underbrace{\text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } w = \alpha v}_{\text{« } w \text{ est multiple de } v \text{ »}}$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit $v_1 = (0,1,-1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (1,-1,0)$, et $u = (5,-2,-3)$.
Le vecteur v est combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 car : $v = v_1 + 2v_2 + 3v_3$.

Notation

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$.

On note $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1, ..., v_p$:

$$\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p) = \big\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \; ; \; \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\big\}.$$

Définition

On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un *sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ si :

(i) $0 \in E$;
(ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $v, w \in E$, on a $\alpha v + \beta w \in E$.

Remarques

1. Il est immédiat que : $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

2. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$ et $v_1, \ldots, v_p \in E$.
Par récurrence sur p, on constate que toute combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_p$ appartient à E.

Exemples

1. On considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

(i) On a : $0 + 0 + 0 = 0$ donc $0 \in E$.

(ii) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $v = (x', y', z'), w = (x'', y'', z'') \in E$.
On a : $\alpha v + \beta w = (x, y, z)$ avec $x := \alpha x' + \beta x''$, $y := \alpha y' + \beta y''$, $z := \alpha z' + \beta z''$.
Or : $x + y + z = \alpha(\underbrace{x' + y' + z'}_{0 \text{ car } v \in E}) + \beta(\underbrace{x'' + y'' + z''}_{0 \text{ car } w \in E})$. D'où : $\alpha v + \beta w \in E$.

En conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Plus généralement, l'ensemble E des solutions d'un système d'équations linéaires homogène (H): $AX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ (*) (exercice).

Définition-Proposition

Soients $p \in \mathbb{N}$ et $v_1, ..., v_p \in \mathbb{R}^n$. On a : $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$ est l'unique sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient $v_1, ..., v_p$ et qui est inclus dans tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ contenant $v_1, ..., v_p$ (plus petit – pour l'inclusion – sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ contenant $v_1, ..., v_p$).

On appelle $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$ le *sous-espace vectoriel* V *de* $\mathbb{R}^n$ *engendré par* $v_1, ..., v_p$ (**).

(*) On dira que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ donné par « équation cartésienne ».
(**) On dira que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ donné par « équation paramétrique ».

Définition

On appelle :

– *droite vectorielle de* $\mathbb{R}^n$ une partie de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathrm{Vect}(v)$ avec $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

– *plan vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ une partie de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathrm{Vect}(v, w)$ avec $v, w \in \mathbb{R}^n$ non-colinéaires.

Dans chacun de ces deux cas on reconnait un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (identifiés à des triplets) avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

Il est « clair » que v_1 et v_2 sont non-colinéaires (car $v_2 \neq 0$ et – au vu des 1^{res} coordonnées – une égalité $v_1 = \alpha v_2$ impliquerait $1 = 0$).

(a) *A-t-on :* $v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ *?*

On étudie par la méthode de Gauss l'existence de $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\overbrace{\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}_{\text{inconnues } \alpha_1, \alpha_2} = v_3}^{\text{expression « paramétrique » des éléments de } \mathrm{Vect}(v_1, v_2)}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[L_2' = L_2 + L_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[L_3' = L_3 + L_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right).$$

Donc : $\quad v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \iff \lambda = -1$.

(b) On suppose que $\lambda \neq -1$. *A-t-on :* $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ *?*

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On étudie par la méthode de Gauss l'existence de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v}_{\text{inconnues } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & \lambda & z \end{array}\right) \xrightarrow[\cdots]{} \text{(étapes ci-dessus)} \xrightarrow[\cdots]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & /// \\ 0 & 1 & 1 & /// \\ 0 & 0 & \lambda+1 & /// \end{array}\right).$$

Donc : $v \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

On peut en conclure – l'inclusion $\subseteq$ étant claire – que : $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

On a : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

On prend ici $F = (Ox)$ et $G = (Oy)$ dans $\mathbb{R}^2$. Donc $F = \mathrm{Vect}((1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1))$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

On a $F \cap G = \{(0,0)\}$, où $\{(0,0)\}$ est un sous–espace vectoriel bien connu de $\mathbb{R}^2$.

Par contre $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car : $1\underbrace{(1,0)}_{\in F} + 1\underbrace{(0,1)}_{\in G} = \underbrace{(1,1)}_{\notin F \cup G}$.

Exemple

Idée : des équations cartésiennes de F et G fournissent une équation cartésienne de $F \cap G$.

On considère $\Pi_1 : x + y + z = 0$ et $\Pi_2 : x + 2y = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. Comme ensembles de solutions de systèmes d'équations homogènes, Π_1 et Π_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (on verra dans le prochain exemple que ce sont des plans vectoriels).

On cherche à préciser la nature du sous-espace vectoriel $\Pi_1 \cap \Pi_2$ de $\mathbb{R}^3$.

On regroupe les équations cartésiennes de Π_1 et de Π_2 : $\quad \Pi_1 \cap \Pi_2 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$.

On va exhiber une équation paramétrique de $\Pi_1 \cap \Pi_2$ en résolvant par la méthode de Gauss :

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2' = L_2 - L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On effectue ensuite de tête la « remontée triangulaire ».

Ainsi : $\quad \Pi_1 \cap \Pi_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$ puis $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une droite vectorielle.

Définition-Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

(a) On note : $F+G := \{v+w\ ;\ v\in F \text{ et } w\in G\}$.

On a : $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, appelé *somme de F et de G*.

(b) On suppose que $F=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ et $G=\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_q)$ avec $v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q\in\mathbb{R}^n$.

On a : $F+G=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q)$.

Exemple

Idée : des équations paramétriques de F et G donnent une équation paramétrique de $F+G$.

On reprend $\Pi_1 : x+y+z=0$ et $\Pi_2 : x+2y=0$ dans $\mathbb{R}^3$. On cherche à préciser $\Pi_1+\Pi_2$.

• Méthode de Gauss pour aboutir à $\Pi_1=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ et $\Pi_2=\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_q)$:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \text{ donne } \Pi_1 : \begin{cases} x=-s-t \\ y=\quad s \\ z=\quad t \end{cases} s,t\in\mathbb{R}, \text{ et } \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \boxed{1} & 2 & 0 \end{array} \text{ donne } \Pi_2 : \begin{cases} x=-2u \\ y=\quad u \\ z=\quad v \end{cases} u,v\in\mathbb{R}.$$

En particulier $\Pi_1=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\Pi_2=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ sont des plans vectoriels.

On a ensuite : $\Pi_1+\Pi_2 : \begin{cases} x=-s-t-2u \\ y=\quad s+u \\ z=\quad t+v \end{cases}$ $s,t,u,v\in\mathbb{R}$. On va voir que : $\Pi_1+\Pi_2=\mathbb{R}^3$.

• Soit $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. On étudie l'existence de $s,t,u,v\in\mathbb{R}$ permettant de s'assurer que v vérifie l'équation paramétrique précédente de $\Pi_1+\Pi_2$, par la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[L_2'=L_2+L_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[L_3'=L_3+L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -2 & 0 & /// \\ 0 & -1 & -1 & 0 & /// \\ 0 & 0 & -1 & 1 & /// \end{array}\right).$$

Donc : $v\in\Pi_1+\Pi_2$.

En conclusion : $\Pi_1+\Pi_2=\mathbb{R}^3$.

2. Familles libres. Familles génératrices. Bases

Dans toute cette partie, on se donne un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$.

Définition $(p\in\mathbb{N})$

(a) *Une famille formée de p vecteurs de E* est un élément $(v_1,\dots,v_p)$ de E^p.

Dans la suite de cette définition, on se donne $v_1,\dots,v_p\in E$.

(b) On dit que $\overbrace{\textit{la famille } (v_1,\dots,v_p) \textit{ est libre}}^{\text{ou « les vecteurs } v_1,\dots,v_p \text{ sont linéairement indépendants »}}$ si pour tous $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$, on a :

$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_p v_p=0 \quad\Longrightarrow\quad \alpha_1=\cdots\alpha_p=0\,.$$

On exprimera qu'une famille de vecteurs de E n'est pas libre en disant qu'*elle est liée*, ce qui signifie donc qu'il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_p v_p=0$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\neq(0,\dots,0)$.

(c) On dit que $\overbrace{\textit{la famille } (v_1,\dots,v_p) \textit{ est génératrice de } E}^{\text{ou « les vecteurs } v_1,\dots,v_p \text{ engendrent } E \text{ »}}$ si pour tout $v\in E$, il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{R}$ tels que : $v=\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_p v_p$.

Ainsi, la famille $(v_1,\dots,v_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)=E$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on choisit $E\colon x+y+z=0$, $v_1=(0,1,-1)$, $v_2=(1,0,-1)$, $v_3=(1,-1,0)$.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (premier exemple concret qui a été proposé pour illustrer la notion de de sous-espace vectoriel) et $v_1, v_2, v_3 \in E$.

1. Pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, on a : $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3}_{(\alpha_2+\alpha_3,\, \alpha_1-\alpha_3,\, -\alpha_1-\alpha_2)} = 0 \iff \alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha_3$.

En particulier, la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre car :

$$1v_1 + (-1)v_2 + 1v_3 = 0 \text{ bien que } (1,-1,1) \neq (0,0,0).$$

2. Soit $v = (x, y, z) \in E$. Pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, sachant que $x + y + z = 0$ on a :
$(\star)$ $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \iff \alpha_2 = x - \alpha_3$ et $\alpha_1 = y + \alpha_3$.

Le choix de $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (y, x, 0)$ montre que l'équation $(\star)$ d'inconnue $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a au moins une solution. Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de E.

Exemple 2

Soient $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

On étudie $(\star)$: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ et $(\star\star)$: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ fixé avec comme inconnue $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, et obtient par la méthode de Gauss que :

– la famille (u_1, u_2, u_3) est libre, cf. $\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[L_3' = L_3 - L_1]{} \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[C_2 \leftrightarrow C_3]{} \underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_3&\alpha_2\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\end{array}}_{\text{unique solution } (0,0,0)}$;

– la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$, cf. $\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&x\\0&2&1&y\\1&0&2&z\end{array}\right)\end{array} \xrightarrow[\cdots]{} \cdots \xrightarrow[\cdots]{} \underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_3&\alpha_2\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&///\\0&1&2&///\\0&0&-1&///\end{array}\right)\end{array}}_{\text{existence d'une solution}}$.

Remarques (exercices)

1. Dans le cas de 0, 1, ou 2 vecteurs, on constate que :
– la famille vide () est libre $\big($vu la convention $\sum\limits_{1 \leq k \leq p} \alpha_k v_k = 0$ quand $p = 0\big)$;
– une famille (v_1) avec $v_1 \in E$ est libre si et seulement si $v_1 \neq 0$;
– deux vecteur de E sont linéairement indépendants si et seulement si ils sont non colinéaires.

2. Une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est liée si et seulement si il existe un vecteur parmi $v_1, \ldots, v_p$ qui est combinaison linéaire des autres.
En particulier, toute famille de vecteurs de E dans laquelle se trouve le vecteur nul ou deux vecteurs égaux, est liée.

3. On dira qu'une famille de vecteurs de E est « extraite » d'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E si elle est de la forme $(v_{i_1}, ..., v_{i_k})$ avec $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq p$.

Tout famille extraite d'une famille libre de vecteurs de E, est libre.

Tout famille de vecteurs de E dont une famille extraite est génératrice de E, est elle-même génératrice de E.

Proposition

Une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est libre et génératrice de E, si et seulement si, pour tout $v \in E$ il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ unique tel que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$.

Définition

Soit $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_d)$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\mathscr{B}$ est *une base de E* si $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de E.

Dans ce cas, pour $v \in E$ les uniques scalaires $\alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_d$ s'appellent *les coordonnées de v suivant $\mathscr{B}$*. On le notera : $\underset{/\mathscr{B}}{v} \left|\begin{array}{l}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_d\end{array}\right.$.

Exemples

1. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$ a la base suivante, appelée *base canonique de* $\mathbb{R}^n$:
$\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ avec $e_1 := (1, 0, ..., 0)$, $e_2 := (0, 1, 0, ..., 0)$, $\ldots$, $e_n := (0, ..., 0, 1)$.
Plus précisément, les coordonnées de $v = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans cette base sont $x_1, ..., x_n$.

2. Soit $(H) : AX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ un système d'équations linéaires homogène.
On sait que l'ensemble $\mathscr{S}_H$ de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

La méthode de Gauss fournit des vecteurs w_1, ..., w_{p-r} de $\mathbb{R}^p$ tels que :
– $\mathscr{S}_H = \{t_1 w_1 + \cdots + t_{p-r} w_{p-r} \; ; \; t_1, \ldots, t_{p-r} \in \mathbb{R}\}$;
– si $t_1 w_1 + \cdots + t_{p-r} w_{p-r} = 0$, alors $\left\{ \begin{array}{l} \text{coordonnée } j_{r+1} : \;\; t_1 + 0 + \cdots + 0 = 0 \\ \vdots \\ \text{coordonnée } j_p \;\; : 0 + \cdots + 0 + t_{p-r} = 0 \end{array} \right.$, alors $t_1 = \cdots = t_{p-r} = 0$.

Ainsi $(w_1, ..., w_{p-r})$ est une base de $\mathscr{S}_H$.

Théorème (admis)

On a : E possède une base $(e_1, ..., e_d)$. Dans ce cas les autres bases de E ont aussi d vecteurs.

Définition

(a) On appelle *dimension de* E le nombre constant, noté $\dim E$, des vecteurs de ses bases.

(b) Soient $v_1, ..., v_p \in \mathbb{R}^n$. On appelle *rang de la famille* $(v_1, ..., v_p)$ le nombre $\dim \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$.
On notera : $\mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_p) := \dim \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$.

Exemples

1. Au vu de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a : $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2. On reprend certaines définitions de la sous-partie 1 :
– $E = \{0\}$ si et seulement si $\dim E = 0$;
– E est une droite vectorielle si et seulement si $\dim E = 1$;
– E est un plan vectoriel si et seulement si $\dim E = 2$.

Proposition (admise)

On note d la dimension de E.

(a) Toute famille libre de E a au plus d vecteurs ;
quand elle a d vecteurs, c'est une base de E.

(b) Toute famille génératrice de E a au moins d vecteurs ;
quand elle a d vecteurs, c'est une base de E.

Corollaire 1

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $F \subseteq E$.
D'après la proposition (a), on a : $\dim F \leq \dim E$; quand $\dim F = \dim E$, on a $F = E$.

Définition

(a) On appelle *sous-espace vectoriel de* E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ inclus dans E.

(b) On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est un *hyperplan de* E si : $\dim F = \dim E - 1$.

Corollaire 2

Soient $v_1, ..., v_p \in E$. On pose : $r = \mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_p)$.

(a) La famille $(v_1, ..., v_p)$ est libre si et seulement si $r = p$.

(b) La famille $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice de E si et seulement si $r = \dim E$.

Remarques

1. On reprend l'exemple du début de la sous-partie 2 : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a vu à l'aide d'un premier calcul que (u_1, u_2, u_3) est libre. On remarque que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est formée de 3 vecteurs. On peut donc utiliser le (a) de la proposition précédente pour en conclure, sans autre calcul, que (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. D'après le corollaire 1, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ont une dimension, égale à 0 ou 1 ou 2 ou 3, le cas de la dimension 3 n'étant atteint que par $\mathbb{R}^3$ lui-même. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont donc $\{0\}$, les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$, les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La partie $F\colon a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ de $\mathbb{R}^n$ est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ car on constate que la méthode de Gauss fournit une base $(w_1, ..., w_{n-1})$ de F.

Proposition

Soient $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, v_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

(a) On transforme $\overset{x_1 \ldots x_p}{A} := \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & \ldots & x_p \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}$ en $\overset{x_{j_1} \ldots x_{j_p}}{A'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_{j_1} & \ldots & x_{j_r} & x_{j_{r+1}} \ldots x_{j_p} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} d_1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & d_r & & & \\ \hline 0 & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \end{array}$

par la méthode de Gauss, avec $d_1 \neq 0$, ..., $d_r \neq 0$.

On a : $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$.

(b) En particulier : $\mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_p) = r$ « calcul du rang par la méthode de Gauss ».
(Le nombre r est donc indépendant de la manière dont on applique la méthode de Gauss.)

Remarque 1 (importante au niveau de la rédaction au cours des partiels et examens)

La proposition (a) n'est pas classique, contrairement à la proposition (b).
Dans chaque exercice on la déduira des calculs simultanés de $\mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_r)$ et $\mathrm{rg}\,(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$:
– on a $\mathrm{rg}\,(v_1, ..., v_r) = r$ par calcul du rang par la méthode de Gauss ;
– on a aussi $\mathrm{rg}\,(v_{j_1}, ..., v_{j_r}) = r$ en reprenant le calcul précédent et rayant à chaque étape les colonnes qui ne sont pas sous les symboles $x_{j_1}, ..., x_{j_r}$;
– ainsi $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ engendre un sous-espace vectoriel de dimension r dans l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_r)$ de dimension r, et il en résulte que $(v_{j_1}, ..., v_{j_r})$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p)$.

Remarque 2

On revient sur l'exemple des 3 vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

La rédaction la plus rapide pour démontrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ consiste à prouver par la méthode de Gauss que $\mathrm{rg}\,(u_1, u_2, u_3) = 3$.