III. Espaces vectoriels. TD 1 - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(a)\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=-1\\ 3x-y+2z=\ \ 7\\ 8x+2y-2z=\ \ 9\end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{r} 2x+y-2z=\ 10\\ x+y+4z=-9\\ 7x+5y+z=\ 14\end{array}\right. \quad (c)\left\{\begin{array}{r} x-3y+7z=-4\\ x-2y-3z=\ \ 6\\ 7x+4y-z=\ 22\end{array}\right.$$

Exercice 2. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(a)\left\{\begin{array}{r} x-3y-2z=-1\\ 2x+y-4z=\ \ 3\\ x+4y-2z=\ \ 4\\ 5x+6y-10z=\ 10\end{array}\right. \quad (b)\left\{\begin{array}{r} x+2y+3z-2t=\ \ 6\\ 2x-y-2z-3t=\ \ 8\\ 3x+2y-z+2t=\ \ 4\\ 2x-3y+2z+t=-8\end{array}\right. .$$

Exercice 3. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y-z=1\\ x+2y+\alpha z=2\\ 2x+\alpha y+2z=3\end{array}\right.$$

(a) n'ait aucune solution ;

(b) ait une infinité de solutions ;

(c) ait une solution unique.

Exercice 4. Pour quelles valeurs des paramètres réels α, β, γ le système suivant admet au moins une solution ?

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=\alpha\\ 3x+8y-14z=\beta\\ 2x+4z=\gamma\end{array}\right.$$

Exercice 5. Soit le système

$$(S)\left\{\begin{array}{rl} x+3y+4z=0 & (L_1)\\ 3x+2y+4z=0 & (L_2)\\ x+2y+3z=0 & (L_3)\end{array}\right. .$$

On remplace L_1 par $L_1'=L_2-L_1$, L_2 par $L_2'=L_2-L_3$ et L_3 par $L_3'=L_1-L_3$. Le système (S) est-il équivalent au système (S') $\left\{\begin{array}{l} L_1'\\ L_2'\\ L_3'\end{array}\right.$?

III. Espaces vectoriels. TD 2 - Géométrie

Exercice 1. $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé d'un plan $\mathcal{P}$.
Soient A, B, C trois points du plan $\mathcal{P}$ et de coordonnées respectivement $(1;1), (3;1), (2;2)$.
1. Vérifier que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Soit D un point de coordonnées $(4;-5)$ dans le repère $\mathcal{R}' = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$. Quelles sont les coordonnées de D dans le repère $\mathcal{R}$?
3. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (m, n) dans $R' = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$. Quelles sont les coordonnées de M dans R ?
4. Considérons la droite δ d'équation cartésienne $y = x$ dans le repère $\mathcal{R}'$. Tracer la droite et donner une équation cartésienne de δ dans le repère $\mathcal{R}$?
5. Donner une équation cartésienne de la droite (BC) dans le repère $\mathcal{R}$ puis dans le repère $\mathcal{R}'$. Donner les coordonnées du point d'intersection de δ et (AB) dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Exercice 2. 1. Donner une équation paramétrique puis cartésienne de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ dans les cas suivants :
(1) $A = (1;2)$ et $\vec{u} = (2;3)$.
(2) $A = (-1;0)$ et $\vec{u} = (1;4)$.
(3) $A = (1/2;3)$ et $\vec{u} = (2;5)$.
2. Donner les coordonnées des points d'intersection de ces droites.

Exercice 3. Donner une équation paramétrique puis cartésienne de la droite passant par les points A et B dans les cas suivants :
1. $A = (1;2)$, $B = (3;1)$.
2. $A = (-2;3)$, $B = (1;1)$.
3. $A = (1;-2)$, $B = (1;2)$.

Exercice 4. Trouver un vecteur directeur des droites suivantes, puis donner une équation paramétrique de ces droites :
$2x + 3y = 2$; $-x - 3y = 0$; $y = 0$; $x = 0$; $4x - 5y = 0$.

Exercice 5. Dans la suite on travaille dans le repère $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.
1. Donner une équation cartésienne (dans $\mathcal{R}$) du plan de l'espace passant par les points A, B et C dans les cas suivants :
(1) $A = (1;2;0)$, $B = (3;1;-1)$, $C = (1;-1;1)$.
(2) $A = (-2;3;3)$, $B = (1;1;1)$, $C = (-1;1;2)$.
(3) $A = (1;-2;-1)$, $B = (1;2;0)$, $C = (1;0;1)$.
2. Donner une équation cartésienne des intersections de ces plans.

Exercice 6. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite de l'espace passant par les points A et B dans les cas suivants :
(1) $A = (1;1;0)$, $B = (-1;0;2)$.
(2) $A = (2;2;3)$, $B = (0;0;1)$.
(3) $A = (-1;-2;-1)$, $B = (1;2;1)$.
Vérifier si ces droites ont des points d'intersection.

Exercice 7. Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan P dans les cas suivants :
(1) $A = (1;1;0)$, $B = (-1;2;-1)$, $P : 2x + 3y + z = 0$.
(2) $A = (0;0;1)$, $B = (1;1;1)$, $P : x + y + z = 0$.
(3) $A = (-1;-2;1)$, $B = (1;1;2)$, $P : x - y - z = 0$.

Exercice 8. Donner une équation paramétrique de la droite (AB) dans les cas (1), (2) et (3) de l'exercice 6.

Exercice 9. Donner un vecteur directeur puis une équation paramétrique de la droite d'intersection des plans P et P' dans les cas suivants :
(1) $P : x + y + z = 2$, $P' : 2x - y + z = 1$.
(2) $P : x - 2y + 3z = -1$, $P' : 3x + y + z = 0$.
(3) $P : 2x + y = 0$, $P' : z = 0$.

Exercice 10. Extraire une base de la direction des plans d'équation : $x+y+z = 2$; $2x-y+z = 1$; $x-2y+3z = -1$; $3x+y+z = 0$; $2x+y = 0$; $z = 0$, puis une donner une équation paramétrique de ces plans.

III. Espaces vectoriels. TD 3 - Algèbre linéaire

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$;

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$;

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$;

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 4\}$;

(f) $F = \{(t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$;

(g) $G = \{(u + v, u - v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(h) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 3\}$;

(i) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$;

(j) $J = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \right\}$;

(k) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0\}$;

(l) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;

(m) $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right\}$;

(n) $N = \{(u, 3v, v - u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(o) $O = \{(u + 1, 3v, v - u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(p) $P = \{(u + v, 2u, v - 4u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(q) $Q = \{(-u, v, u + 3v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(r) $R = \{(u + v - 2, v + 2, 2u + 3v - 2) \mid u, v \in \mathbb{R})\}$.

Exercice 2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non colinéaires, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, 3)$ et $w = (2, -4, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) à quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) On suppose que w n'est pas multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a $P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \,\}$, où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 5. Déterminer une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ où $a_1 = (3, 3, 10)$, $a_2 = (0, 3, 4)$ et $a_3 = (1, 0, 2)$;

(b) $B = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ où $b_1 = (1, 0, 0)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$;

(c) $C = \{(2t + u, -u, -2t) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$;

(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$;

(e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$.

Exercice 6. Comparaison de deux sous-espaces.

(a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 3, 2),\ v_2 = (3, -1, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, -6, -3),\ v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3, v_4). Déterminer la dimension de F et en donner une base. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

(b) Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G.

(c) Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 7.

(a) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille composée des vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$.
La famille $\{u, v\}$ est-elle libre ? La famille $\{u, v\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? La famille $\{u, v\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Soient u, v les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (0, 3, 4)$ et $v = (1, 0, 5)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(c) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -1)$ et $w = (9, 8, 1)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(d) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $u = (1, 1)$, $v = (-1, 1)$ et $w = (3, 3)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

(e) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (-1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-2, 5, 5)$.
Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Ces vecteurs engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(f) Soient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ et $v_4 = (2, 1, 1)$.
Cette famille est-elle libre ? Cette famille est-elle génératrice ? Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(g) Compléter si possible la famille $\{(1, 0, -1), (0, 2, 3)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

(h) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(i) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8. Pour quelles valeurs du paramètre réel a les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 0, 2) \quad v_2 = (1, 0, 1, 2) \quad v_3 = (1, 3, 5, 7) \quad v_4 = (0, 2, 3, a)$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

(a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) à quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

(b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

(c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 12. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2, 3, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, 7)$.