Ch. 4. Propriétés de $\mathbb{R}$ et suites numériques (J-Y Ducloux)

Plan
I. L'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$
II. Suites de nombres complexes
III. Suites convergentes
IV. Suites croissantes majorées

I. L'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$

1. Majoration. Minoration

Définition-Proposition

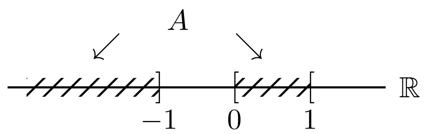
Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

(a) On dit que
- m est un *majorant* (resp. *minorant*) *de* A si pour tout $x \in A$ on a $m \geq x$ (resp. $m \leq x$) ;
- A est *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe un majorant (resp. minorant) de A dans $\mathbb{R}$;
- A est *bornée* si A est majorée et minorée.

(b) On dit que
- m est *« un » plus grand* (resp. *plus petit*) *élément de* A si m est un majorant (resp. minorant) de A qui appartient à A ; dans ce cas, ce m est unique et noté $m = \max(A)$ (resp. $m = \min(A)$;
- m est *la borne supérieure* (resp. *la borne inférieure*) *de* A si m est le plus petit majorant (resp. plus grand minorant) de A ; dans ce cas, on note $m = \sup(A)$ (resp. $m = \inf(A)$).

Exemple

$A =]-\infty, -1] \cup [0, 1[$



Un minorant m de A vérifie : $\forall x \in]-\infty, -1] \quad m \leq x$, donc $m \leq \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.
Cette contradiction montre que A n'a pas de minorant, pas de plus petit élément et pas de borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Un majorant m de A vérifie : $\forall x \in [0, 1[\quad m \geq x$, donc $m \geq \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1$. Réciproquement, tout $m \geq 1$ est un majorant de A. L'ensemble des majorants de A est donc $[1, +\infty[$.
Comme $A \cap [1, +\infty[= \emptyset$, la partie A de $\mathbb{R}$ n'a pas de plus grand élément.
Cependant il existe un plus petit majorant de A : $\sup A = 1$.

Proposition

(a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a : $\min\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{si } x \leq y \\ \text{ou } y & \text{sinon} \end{cases}$ et $\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq y \\ \text{ou } y & \text{sinon} \end{cases}$.

Plus généralement, pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ avec $n \geq 1$, la partie $\{x_1, ..., x_n\}$ de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément noté $\max(x_1, ..., x_n)$ et un plus petit élément noté $\min(x_1, ..., x_n)$.

(b) Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. On a :
- $m = \sup(A) \iff \big((\forall a \in A \quad m \geq a) \text{ et } (\forall x < m \quad \exists a \in A \quad x < a)\big)$;
- $m = \inf(A) \iff \big((\forall a \in A \quad m \leq a) \text{ et } (\forall x > m \quad \exists a \in A \quad x > a)\big)$.

(c) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On a : $\sup A$ (resp. $\inf A$) existe et appartient à A si et seulement si $\max A$ (resp. $\min A$) existe. Dans ce cas : $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$).

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ \text{ou} \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Remarque

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En distinguant les cas $x \leq y$ et $x > y$, on obtient :
$\min(x, y) = \frac{x+y}{2} + \min\left(x - \frac{x+y}{2}, y - \frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2} - \left|\frac{x-y}{2}\right|$
et $\max(x, y) = \frac{x+y}{2} + \max\left(x - \frac{x+y}{2}, y - \frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2} + \left|\frac{x-y}{2}\right|$.

Proposition

On a : $|x + y| \leq |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ « inégalité triangulaire ».

2. Existence de la borne supérieure

Théorème (admis)

(a) Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
Par convention, l'égalité « $\sup A = +\infty$ » ($A \subseteq \mathbb{R}$) signifiera que « A n'est pas majorée ».

(b) Toute partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.
Par convention, l'égalité « $\inf A = -\infty$ » ($A \subseteq \mathbb{R}$) signifiera que « A n'est pas minorée ».

Corollaire

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > x$ « axiome d'Archimède ».

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{Z}$ unique tel que : $N \leq x < N + 1$.
On note : $\mathrm{E}(x) = N$ *partie entière de x*.

Exemples

On a : $3 \leq \pi < 4$ et $-4 \leq -\pi < -3$. Donc $\mathrm{E}(\pi) = 3$ et $\mathrm{E}(-\pi) = -4$.

Définition

(a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un *voisinage de x_0 (dans $\mathbb{R}$)* est une partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq V$. Important ici : $\boxed{]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}}$.

(b) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que A *est dense dans* $\mathbb{R}$ si pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout voisinage V de x_0, on a $V \cap A \neq \emptyset$.

Proposition

(a) Il existe un unique $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $x^2 = 2$. On le note $\sqrt{2}$.
(b) Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Proposition

(a) Les parties $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

(b) La partie $\left]-\infty, \sqrt{2}\right[\cap \mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$ est non-vide majorée, sans borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Proposition

On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont, par définition, les ensembles : $\emptyset$; $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$; $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$; $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$; $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$; $]-\infty, +\infty[$.

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si :
$$\forall x, y \in I \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (x \leq t \leq y \implies t \in I).$$

II. Suites de nombres complexes

Important : tous les résultats de ce chapitre resteront valables en acceptant aussi comme « suites » les applications $n \mapsto u_n$ de $\mathbb{N} \backslash \{0, 1, ..., n_0 - 1\}$ dans $\mathbb{C}$, notées $(u_n)_{n \geq n_0}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. Suites

Définition

(a) On appelle *suite de nombres complexes* une application $n \mapsto u_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.
On notera $(u_n)_{n \geq 0}$ une telle suite. Elle est dite *réelle* si $u_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \geq 0$.

(b) Soit $r \in \mathbb{C}$. *Une suite arithmétique de raison* r est une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de la forme :

$$u_n = nr + c \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ avec } c \in \mathbb{C} \text{ fixé.}$$

(c) Soit $r \in \mathbb{C}$. *Une suite géométrique de raison* r est une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de la forme :

$$u_n = r^n c \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ avec } c \in \mathbb{C} \text{ fixé.}$$

Remarques

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0} = (nr + c)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique avec $r, c \in \mathbb{C}$.

On a : $\boxed{u_0 + \cdots + u_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}}$.

2. Soit $(u_n)_{n \geq 0} = (r^n c)_{n \geq 0}$ une suite géométrique avec $r, c \in \mathbb{C}$.

On a : $\boxed{u_0 + \cdots + u_n = \frac{\text{premier terme} - \text{dernier terme} \times \text{raison}}{1 - \text{raison}}, \text{ lorsque } r \neq 1}$.

2. Suites bornées

Définition

On se donne une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{C}$.

(a) On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On suppose la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ réelle. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi : $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Exemple

On pose $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée car $|(-1)^n| \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.

III. Suites convergentes

1. Limite d'une suite

Définition-Proposition

On se donne une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathbb{C}$.

(a) Soit $l \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ $\underbrace{\textit{a pour limite } l}_{\textit{ou « tend vers } l \textit{ »}}$ *quand* $n \to +\infty$ si :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{pour tout } \varepsilon > 0} \quad \underbrace{\exists N \in \mathbb{N}}_{\text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon \big).$$

Dans ce cas, l est unique.
On note « $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ » ou « $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ » pour exprimer que $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite l.

(b) On dit que

– $(u_n)_{n\geq 0}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $(u_n)_{n\geq 0}$ a pour limite l ;
– $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge si $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas.

On a : toute suite convergente de nombres complexes est bornée.

(c) On suppose la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ réelle.

On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* $+\infty$ *quand* $n \to +\infty$ si :
$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geq N \implies u_n > A \big).$$
On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ *tend vers* $-\infty$ *quand* $n \to +\infty$ si :
$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geq N \implies u_n < -A \big).$$
Dans les deux cas précédents, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée, donc diverge (cf. (b)).
On note « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{+\infty}_{(\text{resp. } -\infty)}$ » ou « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \underbrace{+\infty}_{(\text{resp. } -\infty)}$ » pour exprimer que $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $\underbrace{+\infty}_{(\text{resp. } -\infty)}$.

Exemple (axiome d'Archimède avec $\varepsilon = 1$)

On pose $u_n = n$ pour $n \geq 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ a pour limite $+\infty$ car pour chaque $A > 0$, en posant $N = \mathrm{E}(A) + 1$ on a : $u_n \geq \mathrm{E}(A) + 1 > A$ dès que $n \geq N$.

Proposition

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites de nombres complexes.

(a) On suppose que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ avec $u, v \in \mathbb{C}$.

On a : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u + v$, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} uv$, et, si $v \neq 0$, $\underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{v_n \neq 0 \text{ pour « } n \text{ assez grand »}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u}{v}$.

(b) On suppose $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ réelles, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v$ avec $u, v \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Les formules du (a), interprétées correctement (*) restent valables, à condition :
– d'écarter les formes indéterminées sous forme de sommes $\underbrace{(+\infty) + (-\infty) \text{ et } (-\infty) + (+\infty)}_{\text{« } \infty - \infty \text{ »}}$, produits $\underbrace{0\,(+\infty) \text{ et } (+\infty)\,0 \text{ et } 0\,(-\infty) \text{ et } (-\infty)\,0}_{\text{« } 0\,\infty \text{ »}}$, et quotients $\frac{0}{0}$, $\underbrace{\frac{+\infty}{+\infty} \text{ et } \frac{-\infty}{-\infty} \text{ et } \frac{+\infty}{-\infty} \text{ et } \frac{-\infty}{+\infty}}_{\text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}}$;
– de n'étudier la limite de $(\frac{u_n}{v_n})_{n\geq n_0}$ dans le cas $v = 0$ que lorsque $\begin{cases} v_n > 0 \text{ pour « } n \text{ assez grand »} \\ \text{ou } v_n < 0 \text{ pour « } n \text{ assez grand »} \end{cases}$.

Exemples

1. On a déjà vu que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. On considère une suite arithmétique $(nr + c)_{n\geq 0}$ avec $r, c \in \mathbb{R}$.
On a, avec un calcul direct quand $r = 0$: $nr + c \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } r > 0 \\ \text{ou } \; c & \text{si } r = 0 \\ \text{ou } -\infty & \text{si } r < 0 \end{cases}$.

3. Attention aux formes indéterminées, par exemple avec $u_n := n^2$ et $v_n := -n$, $n \in \mathbb{N}$.
On a : $u_n = n \times n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n = (-1) \times n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Mais : $u_n + v_n = n^2\,(1 - \frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{+\infty}_{\neq 0}$.

Remarque

Il découle immédiatement des définitions que :
si $f\colon [0, +\infty[\,\to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vérifient $f(x) \underset{x\in\mathbb{R},\, x\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $f(n) \underset{n\in\mathbb{N},\, n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
Cela permettra d'utiliser les résultats concernant les « croissances comparées ».

2. Composition des limites

(*) Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \{+, -\}$. On lira dans la conclusion du (a) : $\epsilon\infty + v = u + \epsilon\infty = \epsilon\infty$, $\epsilon\infty + \epsilon\infty = \epsilon\infty$; $(\epsilon\infty)v = u(\epsilon\infty) = \epsilon\infty$ si $u, v > 0$, $(\epsilon\infty)v = u(\epsilon\infty) = -\epsilon\infty$ si $u, v < 0$, $(\epsilon\infty)(\epsilon\infty) = +\infty$ et $(\epsilon\infty)(-\epsilon\infty) = -\infty$; $\frac{u}{\epsilon\infty} = 0$, $\frac{\epsilon\infty}{v} = \epsilon\infty$ si $v > 0$, $\frac{\epsilon\infty}{v} = -\epsilon\infty$ si $v < 0$, on remplacera $\frac{\epsilon\infty}{v}$ par $\epsilon\infty$ (resp. $-\epsilon\infty$) si $v = 0$ avec $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) pour « n assez grand », on remplacera $\frac{u}{v}$ par $\epsilon\infty$ (resp. $-\epsilon\infty$) si $u \neq 0$ a pour signe ϵ et $v = 0$ avec $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) pour « n assez grand ».

Définition

On se donne une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes.

On appelle *suite extraite* de $(u_n)_{n\geq 0}$ toute suite de la forme $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ avec :
$0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ dans $\mathbb{N}$ (c-à-d $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$).

Proposition

On se donne une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}$ et une suite extraite $(u_{n_k})_{k\geq 0}$ de $(u_n)_{n\geq 0}$.

(a) Soit $l \in \mathbb{C}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

(b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ réelle.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{+\infty}_{(\text{resp. } -\infty)}$, alors $u_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{+\infty}_{(\text{resp. } -\infty)}$.

Exemple (important)

On pose $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 0$.

Les suites $(v_n)_{n\geq 0} := (1)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0} := (-1)_{n\geq 0}$ sont extraites de $(u_n)_{n\geq 0}$ car :
$v_k = u_{2k}$ et $w_k = u_{2k+1}$ avec $0 \leq 2{\times}0 < 2{\times}1 < \ldots$ et $0 \leq 2{\times}0+1 < 2{\times}1+1 < \ldots$.

Soit $l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ et $l = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1$.
Cette contradiction montre que : la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Proposition

On se donne une application $g\colon \underset{\text{partie de } \mathbb{R}}{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E.

On considère $k, l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} k$ et $g(y) \underset{y\to k}{\longrightarrow} l$, alors $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
Si $k \in \mathbb{R}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} k$ avec $u_n \underbrace{\neq k}_{(\text{resp. : } >k,\ <k)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\underset{(\text{resp. } y\to k^+,\ y\to k^-)}{g(y) \underset{\substack{y\to k\\ y\neq k}}{\longrightarrow} l}$, alors $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exemple (important)

On montre par l'absurde, en utilisant la proposition, que $x \mapsto \sin x$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$. Sinon, en supposant que $\sin x \underset{x\in\mathbb{R},\, x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, on aurait :
$l = \lim\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\to+\infty} \sin(2\pi n) = 0$ et $l = \lim\limits_{n\in\mathbb{N},\, n\to+\infty} \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}\, n) = 1$ <u>contradiction</u>.

3. Utilisation d'inégalités

Proposition

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(w_n)_{n\geq 0}$ des suites dans $\mathbb{R}$.

(a) Si $\begin{cases} u_n \leq w_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \in \mathbb{R} \text{ et } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} w \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $u \leq w$ « prolongement des inégalités larges ».

(b) Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ l \in \mathbb{R},\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \text{ et } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \end{cases}$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ « théorème des gendarmes ».

(c) Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ (resp. } v_n \leq w_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty) \end{cases}$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (resp. $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$).

Remarque

Le « prolongement des inégalités strictes » pose un problème.
Par exemple, on a $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \not< \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$.

Corollaire

On se donne une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}$.

On pose $u_n = a_n + ib_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $u = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \iff |u_n - u| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

En particulier une suite de nombres réels qui converge dans $\mathbb{C}$ a une limite réelle.

Exemple

On considère une suite géométrique $(r^n)_{n\geq 0}$ avec $r \in \mathbb{C}$ (choix de $c = 1$).

On a vu à la fin du paragraphe 2 que cette suite diverge lorsque $r = -1$. Cas général :

– si $|r| > 1$: $|r^n| = |r|^n = \big(1 + \underbrace{(|r|-1)}_{\text{noté } h}\big)^n \underbrace{\geq}_{\text{formule du binôme}} 1 + nh$ avec $1 + nh \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

donc $\boxed{|r^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ quand } |r| > 1}$ en particulier la suite non-bornée $(r^n)_{n\geq 0}$ diverge ;

– si $|r| = 1$: $|r|^n = \underbrace{1}_{\underset{n\to+\infty}{\not\to} 0}$ donc $r^n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, puis $r = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty} r^n} = 1$ quand $(r^n)_{n\geq 0}$ converge,

donc $\boxed{(r^n)_{n\geq 0} \text{ diverge quand } |r| = 1 \text{ et } r \neq 1}$ et bien sûr $r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ quand $r = 1$;

– si $|r| < 1$: $|r^n| = \dfrac{1}{\left|\left(\frac{1}{r}\right)^n\right|}$ avec $\left|\frac{1}{r}\right| > 1$, donc $\boxed{r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ quand } |r| < 1}$ vu le premier cas.

IV. Suites croissantes majorées

1. Suites monotones

Définition-Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est *croissante* (resp. *décroissante*) si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) $u_p \leq u_q$ (resp. $u_p \geq u_q$) pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$;

(ii) $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Toute suite croissante majorée converge

Théorème (« théorème des suites monotones »)

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante (resp. décroissante) dans $\mathbb{R}$ est :

- convergente de limite $\sup\limits_{n\geq 0} u_n$ (resp. $\inf\limits_{n\geq 0} u_n$) lorsqu'elle est majorée (resp. minorée) ;
- divergente de limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsqu'elle n'est pas majorée (resp. pas minorée).

Théorème (« théorème des suites adjacentes »)

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans $\mathbb{R}$ telles que :

$(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, et $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ « suites adjacentes ».

Alors il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, et $u_n \leq l \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Proposition (« théorème de Bolzano-Weierstrass »)

Toute suite bornée de nombres réels admet une suite extraite convergente.

Exemple

La suite $\big((-1)^n\big)_{n\geq 0}$ admet pour suite extraite convergente la suite $(1)_{n\geq 0}$ (avec $n_k = 2k$).