Université Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Année 2018/2019
MM1, groupes MI1/MIASH4

Interrogation écrite n° 1 (corrigé)

1) *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*
$$f(x) = \begin{cases} x + \sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-2}}) + 2 & si\ x > 2 \\ (x+a)^2 & si\ x \leq 2; \end{cases}$$
Déterminer la(les) valeur(s) du réel a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in]2, +\infty[$ on a $f(x) = x + \sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-2}}) + 2$. Alors sur cet intervalle f est continue.
Pour tout $x \in]-\infty, 2[$ on a $f(x) = (x+a)^2$ avec $a \in \mathbb{R}$. Sur cet intervalle f est un polynomiale et donc elle est continue. Il en résulte que f est continue sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$.
Étudions la continuité de f en 2. Sachant que $-\frac{1}{x-2} \to -\infty$ lorsque $x \to 2^+$ et que $\mathrm{e}^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, d'une part on obtient :
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + \sin(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-2}}) + 2) = 2 + 0 + 2 = 4.$$
D'autre part $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+a)^2 = (2+a)^2 = f(2)$.
Or, la fonction f est continue en 2 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$. C'est-à-dire si et seulement si $4 = (2+a)^2$.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(2+a)^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 = 4 \Leftrightarrow a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a(a+4) = 0$.
Donc on a deux solutions réelles distinctes : $\boxed{a_1 = 0 \text{ et } a_2 = -4}$.

2) *Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et dire si elles admettent des asymptotes verticales, horizontales ou obliques.*

a) $f(x) = \frac{-x^2-1+2x}{x^3-4x-x^2+4}$.

On a $f(x) = \frac{-(x^2-2x+1)}{x(x^2-4)-(x^2-4)} = \frac{-(x-1)^2}{(x^2-4)(x-1)} = \frac{-(x-1)^2}{(x-2)(x+2)(x-1)}$.
L'expression du dénominateur s'annule pour $x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 1$.
Donc $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbb{R}\backslash\{-2, 1, 2\}}$.
Maintenant il faut utiliser le résultat de l'étude d'une limite pour conclure la présence ou non d'une asymptote. On a :
$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{-(x-1)^2}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{-(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{-4 \times 0^-} = +\infty.$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{-(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{-4 \times 0^+} = -\infty.$$
On en déduit que la courbe représentative de la fonction f admet pour les bonrnes $(-2)^+$ et $(-2)^-$ une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = -2}$.
On a $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{-1}{0^- \times 4} = +\infty$.
et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{-1}{0^+ \times 4} = -\infty$.
On en déduit que la courbe représentative de la fonction f admet pour les bornes 2^+ et 2^- une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 2}$.
On a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)}{(x-2)(x+2)} = 0$.
On en déduit que la courbe représentative de f n'a $\boxed{\text{pas d'asymptote pour les bornes } 1^- \text{ et } 1^+}$.
On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2-1+2x}{x^3-4x-x^2+4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x})}{x^3(1-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$.
Cela signifie que $\boxed{f \text{ n'a pas d'asymptote oblique}}$ (non-horizontale) et que le graphe de f admet pour les bornes $\pm\infty$ une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y = 0}$.

b) $g(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})(1 + x)$.

$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } g \text{ est } \mathbb{R}}$.

Donc $\boxed{g \text{ n'a pas d'asymptote verticale}}$.

Sachant que $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et que $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x}) \times \lim_{x\to-\infty}(1 + x) = -\infty$$

$$\text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x}) \times \lim_{x\to+\infty}(1 + x) = +\infty.$$

Donc $\boxed{g \text{ n'admet pas d'asymptote horizontale au voisinage de } +\infty \text{ et de } -\infty}$.

Mais peut-être elle admet une asymptote oblique. Pour la vérifier cherchons les limites de $\frac{g(x)}{x}$ lorsque $x \to \pm\infty$. En $-\infty$ on a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-x})(1 + x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x}) \times \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x}{x} = -\infty.$$

Cela signifie que $\boxed{g \text{ n'a pas d'asymptote oblique au voisinage de } -\infty}$. En $+\infty$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x}) \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x}{x} = 1 \times 1 = 1.$$

On pose $a = 1$. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(g(x) - ax) &= \lim_{x\to+\infty}((1 - \mathrm{e}^{-x})(1 + x) - x) = \lim_{x\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) \\ &= 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x}{\mathrm{e}^{x}} = 1 - 0 = 1 = b.\end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\boxed{\text{le graphe de } g \text{ a pour la borne } +\infty \text{ une asymptote oblique d'équation } y = x + 1}$.