
Examen partiel

Documents, caleuses, téléphones mobiles et ordinateurs portables sont strictement prohibés.
Une attention particulière est portée à la justification des arguments et à la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants les uns des autres.

DURÉE : DEUX HEURES.

Exercice 1. (10 points) ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 3}.$$

- (0,5) 1. Quel est le domaine de définition \mathcal{D} de f ?
- (1) 2. Justifier que f est dérivable sur \mathcal{D} et calculer sa fonction dérivée f' .
- (2,5) 3. Résoudre l'équation (\star): $t^4 - 7t^2 - \frac{15}{4} = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
- (2) 4. Dédurre des questions précédentes les variations de f .
Indication : exhiber $a > 0$ et $a' < 0$ tels que $t^4 - 7t^2 - \frac{15}{4} = (t^2 + a)(t^2 + a')$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- (3) 5. Déterminer, si elles existent, les asymptotes verticales et obliques de f .
- (1) 6. Représenter l'allure de la courbe représentative de f .

Valeurs numériques approchées utiles : $\sqrt{\frac{15}{2}} \simeq 2,739$ et $\sqrt{\frac{3}{2}} \simeq 1,225$.

Exercice 2. (4 points) COSINUS ET SINUS D'ANGLES MULTIPLES

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- (1) 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Énoncer l'identité qui exprime $\cos(nx) + i \sin(nx)$ à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- (3) 2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 3. (3 points) RECHERCHE DE RACINES CUBIQUES

On cherche les racines cubiques du nombre complexe $w = -\sqrt{3} + 3i$.

- (1) 1. Donner la liste des racines cubiques de l'unité.
- (1) 2. Écrire sous forme trigonométrique le complexe w .
- (1) 3. Déterminer les racines cubiques de w .

Exercice 4. (4 points) RACINES D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2

- (4) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ en l'inconnue $z \in \mathbb{C}$, où

$$P(z) = z^2 - (4 + i)z + 5(1 + i).$$