Examen partiel corrigé

Exercice 1. ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 3}.$$

1. *Quel est le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f ?*

   f est le quotient de deux applications polynomiales P et Q, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, où le numérateur de f est $P : x \mapsto 2x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ et son dénominateur $Q : x \mapsto 2x^2 - 3$.
   Le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f est donc la partie de $\mathbb{R}$ où Q ne s'annule pas :

   $$\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, +\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right\}$$

   Pour alléger les écritures, on pose $\boxed{b = \sqrt{\tfrac{3}{2}}}$.

2. *Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer sa fonction dérivée f'.*

   Les applications polynomiales P et Q sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. La fonction Q^{-1} définie sur $\mathscr{D}$ est continue et dérivable sur $\mathscr{D}$: il en est donc de même pour le produit $f = P.Q^{-1}$. De plus, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(2x^2-3)^2}\left((6x^2+4x+5)(2x^2-3) - (2x^3+2x^2+5x-3)4x\right) \\ &= \frac{4x^4 - 28x^2 - 15}{(2x^2-3)^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

3. *Résoudre l'équation $(\star)$: $t^4 - 7t^2 - \frac{15}{4} = 0$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.*

   Notons $\mathscr{S}_\star$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation bicarrée $(\star)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t \in \mathscr{S}_\star$ si et seulement si t^2 est solution de l'équation en $s \in \mathbb{R}$:

   $$s^2 - 7s - \frac{15}{4} = 0 \iff 4s^2 - 28s - 15 = 0. \tag{1.2}$$

   De façon classique, on calcule le discriminant Δ du trinôme $(\star)$: $\Delta = 7^2 + 4\frac{15}{4} = 64 = 8^2$ et l'on en trouve les deux racines réelles $s = \frac{1}{2}(7 \pm 8)$, soit $-\frac{1}{2}$ et $\frac{15}{2}$. On peut aussi calculer directement :

   $$4s^2 - 28s - 15 = (2s-7)^2 - 49 - 15 = (2s-7)^2 - 8^2 = (2s+1)(2s-15) \tag{1.3}$$

   Les solutions de (1.2) sont donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{15}{2}$. On en déduit que $t \in \mathbb{R}$ est solution de $(\star)$ si et seulement si $t^2 \in \{-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\}$ autrement dit,

   $$\mathscr{S}_\star = \left\{-\sqrt{\frac{15}{2}}, +\sqrt{\frac{15}{2}}\right\}.$$

   Pour alléger les écritures, on pose $\boxed{b' = \sqrt{\tfrac{15}{2}} > b > 0}$.

4. *Déduire des questions précédentes les variations de f.*

   Indication *: exhiber $a > 0$ et $a' < 0$ tels que $t^4 - 7t^2 - \frac{15}{4} = (t^2 + a)(t^2 + a')$ pour $t \in \mathbb{R}$.*
   On déduit de la question précédente que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$4t^4 - 28t^2 - 15 = 4\left(t^2 + \frac{1}{2}\right)\left(t^2 - \frac{15}{2}\right) = 2(2t^2+1)(t^2 - b'^2) = 2(2t^2+1)(t+b')(t-b'),$$

de sorte que, pour tout $x \in \mathscr{D}$,

$$f'(x) = \frac{2(2x^2+1)(x+b')(x-b')}{(2x^2-3)^2}. \tag{1.4}$$

f' ne s'annule donc qu'en $-b'$ et b' et $f'(x)$ possède le même signe que $(x+b')(x-b')$.
D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-b'$		$-b^-$	$-b^+$		$+b^-$	$+b^+$		$+b'$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-b')$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$f(b')$	$\nearrow$	$+\infty$

Précisons la valeur des extrema locaux $f(\varepsilon b')$ où $\varepsilon \in \{-1,+1\}$:

$$f(\varepsilon b') = \frac{2\frac{15}{2}\varepsilon b' + 2\frac{15}{2} + 5\varepsilon b' - 3}{2\frac{15}{2} - 3} = 1 + \varepsilon \frac{5}{3} b'.$$

Étudions les limites de f en $\pm\infty$, $-b^-$, $-b^+$, b^- et b^+.

(a) *Limites de f en $\pm\infty$*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 2$, on calcule :

$$f(x) = \frac{2x^3\left(1 + x^{-1} + \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-3}\right)}{2x^2\left(1 - \frac{3}{2}x^{-1}\right)} = x\frac{1 + x^{-1} + \frac{5}{2}x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-3}}{1 - \frac{3}{2}x^{-1}} = x\varphi(x). \tag{1.5}$$

Comme $x \mapsto x^{-1}$ tend vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$, la fonction φ tend vers 1 en $+\infty$ et $-\infty$.
On déduit de (1.5) que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

(b) *Limites de f en $\pm b^+$ et $\pm b^-$*

Soit $\varepsilon \in \{-1,+1\}$. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit pour que $U_\delta =]\varepsilon b - \delta, \varepsilon b + \delta[\setminus \{\varepsilon b\} \subseteq \mathscr{D}$. Alors, pour tout $x \in U_\delta$,

$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x - 3}{2(x^2 - b^2)} = \frac{1}{x - \varepsilon b}\,\frac{2x^3 + 2x^2 + 5x - 3}{2(x + \varepsilon b)} = \frac{1}{x - \varepsilon b} F_\varepsilon(x) \tag{1.6}$$

où $x \mapsto F_\varepsilon(x)$ est une fraction rationnelle [1] définie sur un intervalle ouvert contenant εb.
Comme F_ε est continue en εb et que $F_\varepsilon(\varepsilon b) = 2 > 0$, l'équation (1.6) montre que f tend vers $+\infty$ en εb^+ et $-\infty$ en εb^-.

5. *Déterminer, si elles existent, les asymptotes verticales et obliques de f.*
(1.5) montre que $x \mapsto \varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ tend vers 1 en $+\infty$ et $-\infty$. On étudie donc la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 2$, $x \in \mathscr{D}$ et on calcule :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{2x^3 + 2x^2 + 5x - 3 - x(2x^2 - 3)}{2x^2 - 3} = \frac{2x^2 + 8x - 3}{2x^2 - 3} \\ &= \frac{x^2\left(2 + 8x^{-1} - 3x^{-2}\right)}{x^2\left(2 - 3x^{-2}\right)} = \frac{2 + 8x^{-1} - 3x^{-2}}{2 - 3x^{-2}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $x \mapsto f(x) - x$ tend vers 1 en $+\infty$ et $-\infty$.
La droite d'équation $y = x + 1$ est donc asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Soit $\varepsilon \in \{-1,+1\}$. Comme f tend vers $+\infty$ en εb^+ et $-\infty$ en εb^-, les droites verticales d'équation $x = \varepsilon b$ sont des asymptotes verticales à la courbe représentative de f en $x = \varepsilon b$.

6. *Représenter l'allure de la courbe représentative de f.*
Valeurs numériques approchées utiles : $\sqrt{\frac{15}{2}} \simeq 2{,}739$ et $\sqrt{\frac{3}{2}} \simeq 1{,}225$.

1. On appelle *fraction rationnelle* toute fonction égale au quotient de deux fonction polynomiales.

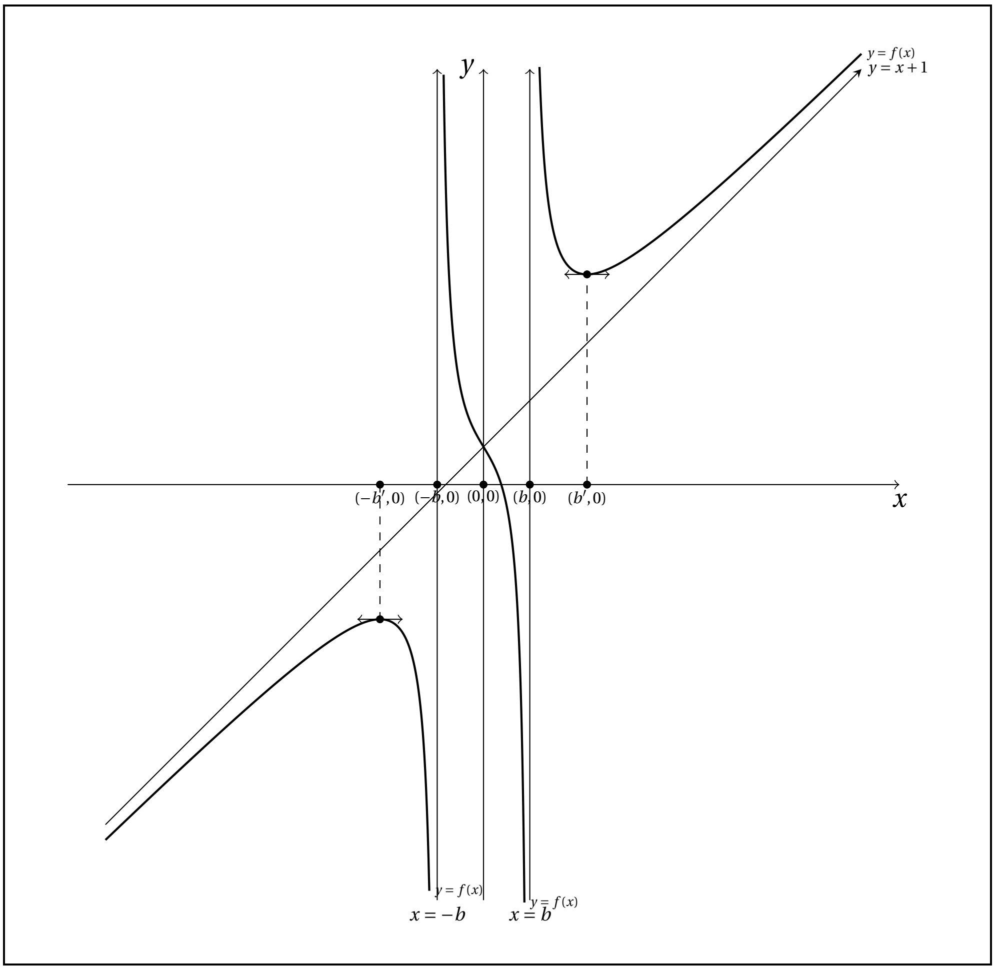

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f et ses trois asymptotes verticales $x = \pm b$ et oblique $y = x+1$

Exercice 2. COSINUS ET SINUS D'ANGLES MULTIPLES

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Énoncer l'identité qui exprime* $\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ *à l'aide de* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$.
   La formule dite de Moivre [2], énoncée par Abraham De Moivre [3] montre que
   $$\cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n.$$
2. *Exprimer* $\cos(4x)$ *et* $\sin(4x)$ *en fonction de* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$.
   Lorsque $n = 4$, la formule du binôme de Newton stipule que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$,
   $$(a+b)^4 = \sum_{0\leqslant k\leqslant 4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
   En faisant $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$, on déduit que :
   $$\begin{aligned}\cos(4x) + \mathrm{i}\sin(4x) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^4 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant 4} \binom{4}{k} (\cos(x))^{4-k} (\mathrm{i}\sin x)^k \\ &= \sum_{0\leqslant l\leqslant 2} \binom{4}{2l} (\cos(x))^{4-2l} (-\sin^2 x)^l + \mathrm{i}\sin x \sum_{0\leqslant l\leqslant 1} \binom{4}{2l+1} (\cos(x))^{4-2l-1} (-\sin^2 x)^l,\end{aligned}$$

2. Il est d'usage après la préposition « de » d'élider toute expression commençant elle-même par « de ».

3. Abraham De Moivre (1667, VITRY-LE-FRANÇOIS — 1754, LONDRES) est un mathématicien français de foi protestante qui, après la révocation de l'Édit de Nantes et son emprisonnement jusqu'en 1688, émigra en Angleterre. Malgré son talent reconnu et son amitié réelle avec Isaac Newton, il ne put obtenir aucun poste universitaire en Angleterre et vécut pauvrement de leçons privées de mathématiques. Il publia en 1718 *The Doctrine of Chances*, premier ouvrage où parurent des notions essentielles du calcul *moderne* des probabilités et de la statistique.

En égalisant parties réelle et imaginaire de chaque membre de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= \cos^4(x) + 6\cos^2(x)(-\sin^2 x) + (-\sin^2 x)^2 = \cos^4(x) + 6\cos^2(x)(\cos^2(x)-1) + (\cos^2(x)-1)^2 \\
&= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 \\
\sin(4x) &= \sin x\left(4\cos^3(x) + 4\cos(x)(-\sin^2 x)\right) = \sin x\left(4\cos^3(x) + 4\cos(x)(\cos^2(x)-1)\right) \\
&= \sin x\left(8\cos^3(x) - 4\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

3. *À titre d'exercice, on propose une méthode alternative.*
   (a) *Exprimer* $\cos(2x)$ *et* $\sin(2x)$ *à l'aide de* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$.
   Les formules d'addition des angles montrent que

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2 x = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \\
\sin(2x) &= 2\sin x\cos(x).
\end{aligned}$$

   (b) *Utiliser deux fois les égalités précédentes pour retrouver les expressions de* $\cos(4x)$ *et de* $\sin(4x)$.
   En utilisant deux fois les formules précédentes, on retrouve que :

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= 2\cos^2(2x) - 1 = 2\left(2\cos^2(x)-1\right)^2 - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 \\
\sin(4x) &= 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin x\cos(x)\left(2\cos^2(x)-1\right) = \sin x\left(8\cos^3(x) - 4\cos(x)\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3. RECHERCHE DE RACINES CUBIQUES
On cherche les racines cubiques du nombre complexe $w = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

1. *Donner la liste des racines cubiques de l'unité.*
   L'ensemble des racines cubiques de l'unité est l'ensemble $\{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\}$, où $\mathrm{j} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\right)$.
2. *Écrire sous forme trigonométrique le complexe* w.
   On calcule le module de $w = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$: $|w| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = \sqrt{4.3} = 2\sqrt{3}$. Il en résulte que :

$$\frac{w}{|w|} = \frac{-\sqrt{3}+3\mathrm{i}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\right), \quad \text{de sorte que} \quad w = 2\sqrt{3}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}\right).$$

3. *Déterminer les racines cubiques de* w.
   L'écriture trigonométrique de w fournit aisément une racine cubique :

$$z_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{1}{3}\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{2}.\sqrt[6]{3}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{9}\right) = \sqrt[6]{12}\exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{9}\right).$$

   Les trois racines cubiques de w sont donc z_0, $z_1 = z_0\mathrm{j} = \sqrt[6]{12}\exp\left(\mathrm{i}\frac{8\pi}{9}\right)$ et $z_2 = z_0\mathrm{j}^2 = \sqrt[6]{12}\exp\left(\mathrm{i}\frac{14\pi}{9}\right)$.

Exercice 4. RACINES D'UN POLYNÔME DE DEGRÉ 2
Résoudre l'équation $P(z) = 0$ *en l'inconnue* $z \in \mathbb{C}$, *où*

$$P(z) = z^2 - (4+\mathrm{i})z + 5(1+\mathrm{i}).$$

P étant un polynôme de degré 2, on calcule son discriminant :

$$\Delta = (4+\mathrm{i})^2 - 4.1.5(1+\mathrm{i}) = (16 - 1 + 8\mathrm{i}) - 20(1+\mathrm{i}) = -5 - 12\mathrm{i}.$$

Une racine carrée complexe $\delta = x + \mathrm{i}y$ de Δ, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, vérifie donc $\delta^2 = \Delta$, i.e. le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{25 + 12^2} = \sqrt{2.12 + 1 + 12^2} = 13 \\ \quad 2xy = -12 < 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = -6 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x + \mathrm{i}y = \pm(2 - 3\mathrm{i}).$$

Les deux racines du polynôme P de degré 2 sont donc $z = \frac{1}{2}\left(4 + \mathrm{i} \pm (2 - 3\mathrm{i})\right)$, soit :

$$z_1 = 3 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 + 2\mathrm{i}.$$