Interrogation écrite n° 2 (durée : 1h)

NOM : ____

Question de cours

a) Quand dit-on qu'une famille $(v_1, ..., v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ?

b) Quand dit-on qu'une partie P de $\mathbb{R}^n$ est un plan vectoriel ?

QCM

Répondre sans justifier, seulement quand vous êtes sûr de vous. Chaque bonne réponse donne $\frac{1}{2}$ point et chaque mauvaise réponse enlève $\frac{1}{2}$ point. Dans le cas d'un total < 0, la note pour ce QCM sera 0.

a) Soit (E): $AX = 0$ un système d'équations linéaires *homogène* de n équations à p inconnues. Si $p > n$, alors (E) a toujours une infinité de solutions. vrai ☐ faux ☐

b) La partie $Q : x - y \geq -1$ de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. vrai ☐ faux ☐

c) Si $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^5$ sont linéairement indépendants, alors $m \geq 5$. vrai ☐ faux ☐

d) Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ et aucun de ces vecteurs n'est multiple d'un des deux autres, alors v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants. vrai ☐ faux ☐

Barème : *Question de cours* sur 2,5 + 2 points ; *QCM* sur 2 points ; 1) sur 4 + 2 points ; 2) sur 4 points ; 3) sur 3,5 points.

Exercices (3 exercices reliés entre eux)

1) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et u_3.

a) Déterminer un système d'équations cartésiennes de F.

b) Quelle est la dimension de F ?

2) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + 2t = 0\}$.
Déterminer une base et la dimension de G.

3) Démontrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Indication : utiliser $G \subseteq F + G$ et exhiber parmi u_1, u_2, u_3 un vecteur qui n'appartient pas à G.

Interrogation écrite n° 2 (durée : 1h)

NOM : ____

Question de cours

a) Quand dit-on qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

b) Quand dit-on qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est une droite vectorielle ?

QCM

Répondre sans justifier, seulement quand vous êtes sûr de vous. Chaque bonne réponse donne $\frac{1}{2}$ point et chaque mauvaise réponse enlève $\frac{1}{2}$ point. Dans le cas d'un total < 0, la note pour ce QCM sera 0.

a) Soit $(E)\colon AX = B$ un système d'équations linéaires *avec second membre* de n équations à p inconnues. Si $p > n$, alors (E) a toujours une infinité de solutions. vrai ☐ faux ☐

b) La partie $Q : xy = 0$ de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. vrai ☐ faux ☐

c) Si $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^5$ engendrent $\mathbb{R}^5$, alors $m \geq 5$. vrai ☐ faux ☐

d) Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ et aucun de ces vecteurs n'est multiple d'un des deux autres, alors v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants. vrai ☐ faux ☐

Barème : *Question de cours* sur 2,5 + 2 points ; *QCM* sur 2 points ; 1) sur 4 + 2 points ; 2) sur 4 points ; 3) sur 3,5 points.

Exercices (3 exercices reliés entre eux)

1) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2 et u_3.

a) Déterminer un système d'équations cartésiennes de F.

b) Quelle est la dimension de F ?

2) Soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + 2t = 0\}$.

Déterminer une base et la dimension de G.

3) Démontrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.

Indication : utiliser $G \subseteq F + G$ et exhiber parmi u_1, u_2, u_3 un vecteur qui n'appartient pas à G.