Université Denis Diderot
UFR de Mathématiques

Année 2018/2019
MM1, groupes MI1 et MIASHS4

Interrogation écrite n° 2 (corrigé)

Question de cours (version 1)

(2,5) a) *Quand dit-on qu'une famille $(v_1, ..., v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre ?*

On dit que $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre si pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, on a :

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \cdots \alpha_p = 0 \, .$$

(2) b) *Quand dit-on qu'une partie P de $\mathbb{R}^n$ est un plan vectoriel ?*

On dit que P est un plan vectoriel s'il existe $v, w \in \mathbb{R}^n$ non-colinéaires tels que $\boxed{P = \mathrm{Vect}(v, w)}$.

Question de cours (version 2)

(2,5) a) *Quand dit-on qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?*

On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si :

(i) $0 \in E$;
(ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $v, w \in E$, on a $\alpha v + \beta w \in E$.

(2) b) *Quand dit-on qu'une partie D de $\mathbb{R}^n$ est une droite vectorielle ?*

On dit que D est droite vectorielle s'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ non-nul tel que $\boxed{D = \mathrm{Vect}(v)}$.

QCM (version 1)

(±0,5) a) *Soit (E): $AX = 0$ un système d'équations linéaires* homogène *de n équations à p inconnues. Si $p > n$, alors (E) a toujours une infinité de solutions.* — *vrai* ☒ *faux* ☐

(C'est un résultat du cours.)

(±0,5) b) *La partie $Q : x - y \geq -1$ de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.* — *vrai* ☐ *faux* ☒

(On a : $(2, 0) \in Q$, mais $(-1) \times (2, 0) \notin Q$.)

(±0,5) c) *Si $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^5$ sont linéairement indépendants, alors $m \geq 5$.* — *vrai* ☐ *faux* ☒

(Contre-exemple : $m = 1$ et $v_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$.)

(±0,5) d) *Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ et aucun de ces vecteurs n'est multiple d'un des deux autres, alors v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants.* — *vrai* ☐ *faux* ☒

(Contre-exemple : $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$. D'ailleurs il y a trop de vecteurs...)

QCM (version 2)

(±0,5) a) *Soit (E): $AX = B$ un système d'équations linéaires* avec second membre *de n équations à p inconnues. Si $p > n$, alors (E) a toujours une infinité de solutions.* — *vrai* ☐ *faux* ☒

(Contre-exemple : $m = 1$, $p = 2$, (E): $0x + 0y = 1$.)

(±0,5) b) *La partie $Q : xy = 0$ de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.* — *vrai* ☐ *faux* ☒

(On a : $(1, 0) \in Q$ et $(0, 1) \in Q$, mais $(1, 0) + (0, 1) \notin Q$.)

(±0,5) c) *Si $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^5$ engendrent $\mathbb{R}^5$, alors $m \geq 5$.* — *vrai* ☒ *faux* ☐

(C'est un résultat du cours.)

(±0,5) d) *Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ et aucun de ces vecteurs n'est multiple d'un des deux autres, alors v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants.* — *vrai* ☐ *faux* ☒

(Contre-exemple : $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$. D'ailleurs il y a trop de vecteurs...)

Exercices (3 exercices reliés entre eux)

1) *On considère les vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *:* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit F *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *engendré par* u_1, u_2 *et* u_3.

(4) a) *Déterminer un système d'équations cartésiennes de* F.

Pour tout $u \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ t \end{matrix} \right. \in \mathbb{R}^4$, on a : $\quad u \in F \iff \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \quad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \overset{(\star)}{=} u$.

On étudie par la méthode de Gauss le système d'inconnues α_1, α_2, α_3 sous-jacent à l'égalité $(\star)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & -3 & y \\ 2 & 0 & 4 & z \\ 2 & 2 & 0 & t \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 2L_1 \\ L_4' = L_4 - 2L_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & x+y \\ 0 & -2 & 2 & -2x+z \\ 0 & 0 & -2 & -2x+t \end{array}\right) \xrightarrow[L_3' = L_3 + L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z \\ 0 & 0 & -2 & -2x+t \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_4]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & -2 & x+y \\ 0 & 0 & -2 & -2x+t \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z \end{array}\right).$$

Par conséquent : $\boxed{\text{le sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathbb{R}^4 \text{ a pour équation } \; F : -x+y+z=0}$.

(2) b) *Quelle est la dimension de* F *?*

Le calcul ci-dessus, à gauche des barres verticales, fournit aussi l'égalité $\operatorname{rg}(u_1, u_2, u_3) = 3$.

Donc : F a pour base (u_1, u_2, u_3) et *a fortiori* $\boxed{\dim F = 3}$.

2) *Soit* $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + 2t = 0\}$.

(4) *Déterminer une base et la dimension de* G.

L'équation cartésienne qui définit G se résout immédiatement en exprimant x à l'aide de y, z, et t :

$$G \left\{ \begin{array}{l} x = -a + 2b - 2c \\ y = a \\ z = b \\ t = c \end{array} \right. \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Donc G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs il est clair que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre car une égalité $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ nécessite, au vu des 2ᵉ, 3ᵉ, et 4ᵉ coordonnées, que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Ainsi : $\boxed{G \text{ a pour base } (v_1, v_2, v_3)}$ et *a fortiori* $\boxed{\dim G = 3}$.

(3,5) 3) *Démontrer que* $F + G = \mathbb{R}^4$.

Indication *: utiliser* $G \subseteq F + G$ *et exhiber parmi* u_1, u_2, u_3 *un vecteur qui n'appartient pas à* G.

On a : $G \subseteq F + G$. Donc $\dim G \leq \dim(F+G)$ avec égalité si et seulement si $G = F + G$.

Par ailleurs $1 + 1 - 2 \times 0 + 2 \times 2 \neq 0$ donc $u_2 \notin G$. On a aussi $u_2 \in F$, donc $u_2 = u_2 + 0 \in F + G$.

D'où : $\dim G < \dim(F+G)$.

Or $\dim G = 3$ d'après l'exercice 2, et $\dim(F+G) \leq 4$ car $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

Cela montre que le sous-espace vectoriel $F + G$ de $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4.

Ainsi : $\boxed{F + G = \mathbb{R}^4}$.